ÁLGEBRA LINEAL
Y APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Lourdes Kala Béjar

$$w_k = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z^n = r^n e^{in\theta},\ \forall n \in Z^+$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$







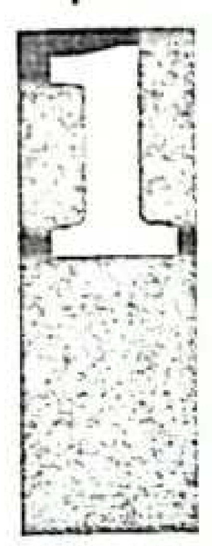




ÍNDICE



Capítulo



MATRICES Y DETERMINANTES

El tema de las matrices y determinantes es para el Álgebra Lineal como la lógica de proposiciones y teoría de conjuntos para el Cálculo Diferencial. Es decir, es lo primero que se da a modo de construir las bases para el estudio de los demás temas que desarrollaremos en este libro.

Comenzaremos definiendo rigurosamente el concepto de matriz, especificando algunas notaciones importantes relacionadas con el mismo, desarrollaremos con amplitud el álgebra de matrices y veremos cómo el concepto de matriz está estrechamente ligado al concepto de determinante.

Conforme a nuestro estudio, las matrices son reales ya que tendrán elementos reales.

1.1 Matrices

Muchos objetos se pueden describir como **cuantitativos** ya que para hacerlo se utilizan números. Por ejemplo, podemos describir en forma cuantitativa la edad de una persona, la velocidad de un tren; etc. Una cantidad escalar es aquella que se puede identificar por un solo número.

¿Cuál es el ejemplo de una cantidad no escalar? Por ejemplo, es la descripción del tamaño de una página de un libro. Para describir cuantitativamente el tamaño de esa página se necesitan dos números: el largo y el ancho, 30 cm de largo y 21 cm de ancho. El par de números se escribe de la siguiente manera: $(30, 21)$.

Una descripción cuantitativa para las tres cantidades asociadas a las dimensiones de una caja rectangular: largo l, ancho a y la altura h será: (l, a, h)

Descripción cuantitativa semejante para una caja rectangular de largo l, ancho a, altura h y que contenga n objetos: (l, a, h, n)

Las cantidades contenidas dentro del paréntesis se llaman **elementos del arreglo.** Además, observamos que los elementos están escritos en una fila horizontal en un orden establecido. Ahora, consideremos dos cajas rectangulares denominadas Caja 1 y Caja 2

La fila que representa el largo, ancho y altura de la Caja 1 se puede escribir como (l_1, a_1, h_1)

Del mismo modo, para la Caja 2: (l_2, a_2, h_2)

Combinando las dos filas dentro de un solo paréntesis

$$\begin{pmatrix} l_1 & a_1 & h_1 \\ l_2 & a_2 & h_2 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos un arreglo con 2 filas y 6 elementos. Escribimos un arreglo para esas dos cajas rectangulares que represente el ancho y el número de objetos que hay dentro de cada caja:

$$\begin{pmatrix} a_1 & n_1 \\ a_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

Ahora describimos el conjunto completo de las características de las dos cajas:

$$\begin{pmatrix} l_1 & a_1 & h_1 & n_1 \\ l_2 & a_2 & h_2 & n_2 \end{pmatrix}$$

Si agregamos la característica del espesor e de las paredes de las cajas, la representación será:

$$\begin{pmatrix} l_1 & a_1 & h_1 & n_1 & e_1 \\ l_2 & a_2 & h_2 & n_2 & e_2 \end{pmatrix}$$

Para ampliar nuestro conocimiento actual, cuál deberá ser la representación de un arreglo para tres cajas, en donde interesan las cuatro características, largo, ancho, altura y espesor de cada caja:

$$\begin{pmatrix} l_1 & a_1 & h_1 & e_1 \\ l_2 & a_2 & h_2 & e_2 \\ l_3 & a_3 & h_3 & e_3 \end{pmatrix}$$

Observamos que el siguiente arreglo

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

representa solo la 1ª característica de las tres cajas. Este arreglo es una **columna** de tres elementos.

Ahora desarrollaremos una disposición para clasificar los elementos de un arreglo en forma más general. Cada elemento del arreglo se representará por una letra minúscula con dos subíndices.

En general, se usa la letra "a" para el arreglo. Los elementos de la 1ª fila se representan por a_{1j}

El subíndice 1 representa la 1ª fila, el subíndice j representa el número de la columna.

Por ejemplo, la Caja 1 con 4 características l, a, h, n se representa por la fila:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$$

Arreglo que representa dos cajas con 4 características:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

luego a_{ij} representa a un solo elemento que se encuentra en la intersección de la i-ésima fila y j-ésima columna del arreglo.

El arreglo rectangular de números, por lo general posee m filas y n columnas, se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces ahora, somos capaces de definir lo que es una matriz.

Definición 1.1

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números o letras ordenados en filas y columnas. Los números en el arreglo se denominan los **elementos** de la matriz.

Consideremos las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ y & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar en este caso, las matrices tienen diferentes tamaños.

Nota

El tamaño de una matriz se describe especificando el número de filas (líneas horizontales) y el número de columnas (líneas verticales).

La primera matriz tiene 3 filas y 2 columnas; por lo tanto, tiene tamaño 3×2. Las matrices restantes tienen tamaños: 1×4, 3×3, 2×1 y 1×1 respectivamente.

Notación

1) Se usarán **letras mayúsculas** para denotar **matrices** y **letras minúsculas** para denotar **elementos**. Veamos

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\-3&0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-1&0\\a&b\end{pmatrix}$$

2) Si A es una matriz, se empleará a_{ij} para denotar al elemento que se encuentra en la fila i y en la columna j de A.

Por consiguiente, la matriz general de 3 filas y 4 columnas se escribe así:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{pmatrix}$$

Si se usa B para denotar la matriz, se usará b_{ij} para el elemento que está en la fila i y columna j de B. Luego, la matriz general de m filas y n columnas se escribe así:

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&&&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&b_{m3}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}$$

3) En la matriz B:

Se llama **i-ésima fila o fila i** y se denota por F_i a la lista de elementos de la siguiente forma:

$$F_i=(b_{i1},b_{i2},\ldots,b_{in})$$

Se llama **j-ésima columna** o **columna j** y se denota por C_j a la lista de elementos de la siguiente forma:

$$C_j=\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{mj}\end{pmatrix}$$

Definición 1.2

Una matriz A de m filas y n columnas se llama **matriz de orden $m \times n$** y se denota por $A_{m\times n}$ o $A = (a_{ij})_{m\times n}$, donde $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota

1) En una matriz de orden $m \times n$, m indica el número de filas y n el número de columnas.

2) Si $m \neq n$, A se llama **matriz rectangular** de orden $m \times n$.

3) Si $m = n$, A se llama **matriz cuadrada** de orden $n \times n$ o simplemente **matriz cuadrada de orden n** y se denota por A_n, $A = (a_{ij})_n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 1.3

Si $A = (a_{ij})_n$ es una matriz cuadrada de orden n entonces los elementos $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}\}$ están en la **diagonal principal** de A.

Ejemplo 1.1

Si

$$A = (a_{ij})_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}$ es la diagonal principal de A.

Definición 1.4

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son **iguales** si y solo si:

1) A y B tienen el mismo orden.

2) $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$. Es decir los correspondientes elementos son iguales.

Ejemplo 1.2

Indicar las matrices que satisfacen la definición de igualdad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A = B$ puesto que A y B tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij};\ \forall i, j$.

$A \neq C$ puesto que A tiene orden 2 y C tiene orden 2×3 (falla la condición 1).

$A \neq D$ puesto que $a_{22} = 4, d_{22} = 0 \Rightarrow a_{22} \neq d_{22}$ (falla la condición 2).

Nota

Basta que falle una de las condiciones de igualdad para que las matrices sean diferentes.

Ejemplo 1.3

Si

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \\ 4c \end{pmatrix}$$

¿Cuándo $A = B$?

$$A = B \Longleftrightarrow a = b = c = 0$$

1.1.1 Matrices especiales

Definición 1.5

La matriz nula o matriz cero, denotada por O, es aquella matriz donde todos sus elementos son iguales a cero. (Una matriz nula no necesariamente será cuadrada)

Ejemplo 1.4

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad O = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Definición 1.6

Una **matriz triangular superior** A es una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0;\ \forall i > j$.

Ejemplo 1.5

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular superior de orden n.

Definición 1.7

Una **matriz triangular inferior** A es una matriz cuadrada cuyos elementos $a_{ij} = 0;\ \forall i < j$

Ejemplo 1.6

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular inferior de orden n.

Definición 1.8

Una matriz diagonal D es una matriz cuadrada triangular superior y triangular inferior.

Ejemplo 1.7

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz diagonal de orden n. Generalmente se denota por $D = \operatorname{diag}(d_{11} d_{22} \cdots d_{nn})$

Definición 1.9

Si en una matriz diagonal D se verifica que $d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn} = \lambda$ entonces D se llama **matriz escalar** y se denota por E.

Ejemplo 1.8

$$E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda \end{pmatrix}_n$$

es una matriz escalar de orden n.

Definición 1.10

La **matriz identidad** o **matriz unidad**, denotada por I, es una matriz escalar con $\lambda = 1$.

Ejemplo 1.9

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.11

Una matriz que consta de una sola fila se llama matriz fila o vector fila, y una matriz que consta de una sola columna se llama matriz columna o vector columna.

Ejemplo 1.10

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$ vector fila o matriz fila

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ vector columna o matriz columna

1.1.2 Operaciones con matrices

1.1.2.1 Adición de matrices

En general, la adición de dos matrices A y B está definida si y solo si las matrices tienen el mismo orden.

Definición 1.12

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$, la suma de A y B, denotada por $A + B$, es otra matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times n$ donde cada elemento c_{ij} satisface la condición: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ejemplo 1.11

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

A y B tienen el mismo orden $\Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} 7+(-3) & -2+5 \\ 3+0 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$A + D$ y $B + D$ no están definidas.

Nota

Observamos que sumar dos matrices equivale a sumar los correspondientes elementos de ambas matrices.

Definición 1.13

Dados una matriz A y un escalar λ, el **producto** de λ por A, denotado por λA tiene la siguiente forma:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nota

Observamos que en la matriz λA, todos los elementos de A están multiplicados por el escalar λ.

Ejemplo 1.12

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$2A = \begin{pmatrix} 2(3) & 2(-1) & 2(4) \\ 2(-2) & 2(0) & 2(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 8 \\ -4 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(-1)A = -A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Nota

Si B es una matriz entonces: $-B = (-1)B$

Definición 1.14

Si A y B son matrices del mismo orden, entonces la diferencia de A y B, denotada por $A - B$, es la siguiente matriz

$$A - B = A + (-B)$$

Ejemplo 1.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Nota

Observamos que restar dos matrices equivale a restar los correspondientes elementos de ambas matrices.

1.1.2.2 Multiplicación de matrices

En general, el producto AB, en este orden, de dos matrices A y B está definido si y solo si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

Definición 1.15

Sea $A = (a_{ik})$ una matriz de orden $m \times p$ y $B = (b_{kj})$ una matriz de orden $p \times n$. El **producto** de A y B, denotado por AB, es otra matriz $C = (c_{ij})$ de orden $m \times n$ donde cada elemento c_{ij} se determina sumando los productos de

los elementos de la fila i de A y los correspondientes elementos de la columna j de B, tomados en ese orden. Es decir:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

$$i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Interpretamos el producto AB en un esquema

$$\overset{C}{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots\cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots\cdots\cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots\cdots\cdots & a_{mp} \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix}}$$

Por el esquema, se deduce que c_{ij} es el producto escalar de la fila i de A con la columna j de B.

Nota

Para que el producto escalar c_{ij} sea posible se requiere entonces que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B. (Restricción inicial para definir el producto AB).

Ejemplo 1.14

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calcular AB si es que existe

a) Analizamos la existencia:

$$A_{2\times 2} \; B_{2\times 3} \Longrightarrow \text{existe } AB = C_{2\times 3} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\quad 2 \times \underbrace{2 = 2}\times 3 \quad}_{2\times 3}$$

b) Calculamos los elementos de AB, usando la definición

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 4(1) + 2(-5) = -6$$

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = 3(-2) + (-1)(7) = -13$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 4(6) + 2(0) = 24$$

Los otros tres elementos de AB, los calculamos usando el esquema:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \boxed{c_{12}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad -1} \\ 4 \quad 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \boxed{6} & -2 \\ -5 & \boxed{0} & 7 \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = (3, -1) \cdot (6, 0) = 18$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{c_{11}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{3 \quad -1} \\ 4 \quad 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{+1} & 6 & -2 \\ \boxed{-5} & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = (3, -1) \cdot (1, -5) = 8$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{c_{23}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \quad -1 \\ \boxed{4 \quad 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & \boxed{-2} \\ -5 & 0 & \boxed{+7} \end{pmatrix}$$

$$c_{23} = (4, 2) \cdot (-2, 7) = 6$$

Luego $AB = \begin{pmatrix} 8 & 18 & -13 \\ -6 & 24 & 6 \end{pmatrix}$

Ejemplo 1.15

Para las matrices dadas en el ejemplo anterior, calcular BA si es que existe.
Primero analizamos la existencia de BA

$$B_{2\times 3} \underbrace{\neq}\ A_{2\times 2} \Longrightarrow$$ no existe BA, puesto que el número de columnas de B es diferente al número de filas de A

Ejemplo 1.16

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ calcular AB y BA si es que existen.

Para calcular AB y BA veamos primero si es que existen:

$$\underbrace{A_{1\times 3} \underset{=}{\ } B_{3\times 1}}_{1\times 1} \Longrightarrow$$ existe $AB = C_{1\times 1}$ (matriz cuadrada de orden 1)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B_{3\times 1} \underset{=}{\ } A_{1\times 3}}_{3\times 3} \Longrightarrow$$ existe $BA = C_{3\times 3}$ (matriz cuadrada de orden 3)

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 15 & -9 \end{pmatrix}$$

Nota

Observamos en los ejemplos anteriores que el producto de matrices, en general, no es conmutativo, es decir $AB \neq BA$.
La propiedad conmutativa, $AB = BA$ puede fallar por varias razones:
Puede suceder que:

1) AB esté definido mientras que BA no, como en los Ejemplos 1.14 y 1.15.

2) AB y BA están definidos y que las matrices resultantes tienen diferentes órdenes como en el Ejemplo 1.16.

3) AB y BA estén definidos, tienen el mismo orden y; sin embargo, las matrices resultantes son diferentes como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.17

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{A_{2\times 2} \; B_{2\times 2}}_{2\times 2} \Longrightarrow \text{existe } AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 15 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B_{2\times 2} \; A_{2\times 2}}_{2\times 2} \Longrightarrow \text{existe } BA = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$AB \neq BA$ (falla la 2ª condición de igualdad de matrices)

Definición 1.16

Sean A y B matrices cuadradas de orden n. A y B son **matrices conmutativas** o **matrices permutables** si $AB = BA$

Ejemplo 1.18

$IA = AI$, $\forall$ matriz cuadrada A_n. (I matriz identidad de orden n)

Ejemplo 1.19

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 26 \\ 39 & 56 \end{pmatrix}$$

$AB = BA \Longrightarrow A$ y B son matrices conmutativas.

Ejemplo 1.20

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca+db & cb+da \\ da+cb & db+ca \end{pmatrix}$$

$AB = BA$ entonces A y B son matrices conmutativas.

Teorema 1.1

Las siguientes propiedades para el álgebra de matrices son válidas suponiendo que los órdenes de las matrices son tales que las operaciones indicadas se pueden realizar

1) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa para la adición)

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa para la adición)

3) $A(BC) = (AB)C$ (propiedad asociativa para el producto)

4) $A(B \pm C) = AB \pm AC$ (propiedad distributiva)

5) $(B \pm C)A = BA \pm CA$

6) $r(A \pm B) = rA \pm rB;\ r \in \mathbb{R}$

7) $(r \pm t)A = rA \pm tA;\ r, t \in \mathbb{R}$

8) $r(tA) = (rt)A = t(rA);\ r, t \in \mathbb{R}$

9) $(rA)B = r(AB) = A(rB);\ r \in \mathbb{R}$

10) $A + O = O + A = A$

11) $A - A = O$

12) $O - A = -A$

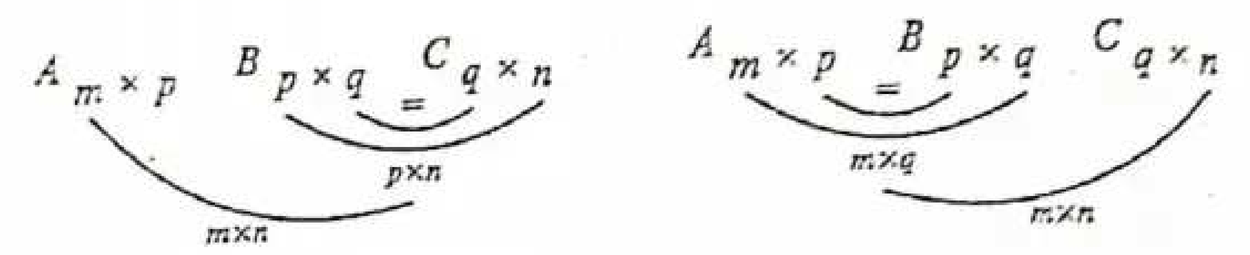
13) $AO = O,\ OA = O$

Demostración. La demostración de estas propiedades es aplicación directa de la definición. A modo de ensayo, demostraremos la propiedad 3).

Deseamos demostrar que $A(BC) = (AB)C$

Consideremos: $A = (a_{ik})_{m\times p}$, $B = (b_{kl})_{p\times q}$, $C = (c_{lj})_{q\times n}$ donde $i = 1,2,\ldots,m$, $k = 1,2,\ldots,p$, $l = 1,2,\ldots,q$, $j = 1,2,\ldots,n$

a) Analizando el orden de las matrices. (1ª condición de igualdad)



Luego $A(BC)$ y $(AB)C$ tienen el mismo orden $m \times n$.

b) Analizando los elementos correspondientes de las matrices. (2ª condición de igualdad)

$$BC = \sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj},\ \text{si } BC = D = (d_{kj})_{p\times n}$$

$$A(BC) = AD = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}d_{kj},\ \text{si } AD = E = (e_{ij})_{m\times n}$$

$$A(BC) = E = (e_{ij}) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{kl}c_{lj}\right),$$

elemento genérico del producto $A(BC)$

$$(e_{ij}) = a_{i1}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{1l}c_{lj}\right) + a_{i2}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{2l}c_{lj}\right) + \cdots + a_{ip}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{pl}c_{lj}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{q}(a_{i1}b_{1l})c_{lj} + \sum_{l=1}^{q}(a_{i2}b_{2l})c_{lj} + \cdots + \sum_{l=1}^{q}(a_{ip}b_{pl})c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \qquad (1.1)$$

Calculamos el elemento genérico de $(AB)C$

$$AB = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}; \text{ si } AB = X = (x_{il})_{m\times q}$$

$$(AB)C = XC = \sum_{l=1}^{q} x_{il}c_{lj}, \text{ si } XC = Y = (y_{ij})_{m\times n}$$

$$(AB)C = Y = (y_{ij}) = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \qquad (1.2)$$

De (1.1) y (1.2) se deduce que las matrices $A(BC)$ y $(AB)C$ tienen el mismo elemento genérico. Por tanto, queda demostrada la igualdad de las matrices.

◇

Ejemplo 1.21

A y B son matrices cuadradas de orden m, C y D son matrices de orden $m \times p$ y $p \times m$ respectivamente donde $m = 25, p = 15$, $A = (a_{ij}) = i + j$, $B = (b_{ij}) = i - j$, $C = (c_{ij}) = i - 2j$, $D = (d_{ij}) = j - 2i$. si $E = (A + B)CD$; calcular:

a) El término genérico (e_{ij}) de E,

b) El término $(e_{12,21})$

a) En efecto: A_m, $B_m \Longrightarrow (A + B)_{m\times m}$, $C_{m\times p}$, $D_{p\times m}$

entonces $(A + B)CD = E_{m\times m}$

Sea

$$G = A + B$$
$$g_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = (i + j) + (i - j) = 2i \Longrightarrow (g_{ij}) = 2i$$

Luego: $E = GCD$

hacemos

$$\begin{aligned} G &= (g_{ik})_{25\times 25} \Longrightarrow i = 1, 2, \ldots, 25 \\ C &= (c_{kl})_{25\times 15} \Longrightarrow k = 1, 2, \ldots, 25 \\ D &= (d_{lj})_{15\times 25} \Longrightarrow l = 1, 2, \ldots, 15 \\ & \qquad\qquad\qquad\quad j = 1, 2, \ldots, 25 \end{aligned}$$

de modo que GCD esté definido

$$CD = \sum_{l=1}^{15} c_{kl} d_{lj} = (x_{kj}) = X_{25\times 25}$$

$$G(CD) = GX = \sum_{k=1}^{25} g_{ik} x_{kj} = (e_{ij}) = E_{25\times 25}$$

Por tanto, el término general de E es:

$$(e_{ij}) = \sum_{k=1}^{25} g_{ik} \left(\sum_{l=1}^{15} c_{kl} d_{lj} \right)$$

b) $(g_{ik}) = 2i$ entonces

$$\begin{aligned} (e_{ij}) &= \sum_{k=1}^{25} 2i \left(\sum_{l=1}^{15} c_{kl} d_{lj} \right) = 2i \sum_{k=1}^{25} \left(\sum_{l=1}^{15} c_{kl} d_{lj} \right) \\ &= 2i \left[\sum_{l=1}^{15} c_{1l} d_{lj} + \sum_{l=1}^{15} c_{2l} d_{lj} + \cdots + \sum_{l=1}^{15} c_{25l} d_{lj} \right] (25 \text{ sumandos}) \\ &= 2i \left[\sum_{l=1}^{15} (1 - 2l)(j - 2l) + \sum_{l=1}^{15} (2 - 2l)(j - 2l) + \cdots \right. \\ & \qquad \left. + \sum_{l=1}^{15} (25 - 2l)(j - 2l) \right] \qquad (1.3) \end{aligned}$$

Observamos que

$$(1-2l)(j-2l) = j(1-2l) - 2l + (2l)^2$$
$$(2-2l)(j-2l) = j(2-2l) - 2(2l) + (2l)^2$$
$$(3-2l)(j-2l) = j(3-2l) - 3(2l) + (2l)^2$$
$$\vdots$$
$$(25-2l)(j-2l) = j(25-2l) - 25(2l) + (2l)^2$$

$i = 12,\ j = 21.$

$$\sum_{l=1}^{15}(1-2l)(j-2l) = \sum_{l=1}^{15}(j(1-2l) - 2l + (2l)^2)$$
$$= \sum_{l=1}^{15}(21(1-2l) - 2l + (2l)^2)$$
$$= 21\sum_{l=1}^{n}1 - 21(2)\sum_{l=1}^{15}l - 2\sum_{l=1}^{15}l + 4\sum_{l=1}^{15}l^2$$

$$\sum_{l=1}^{15}(2-2l)(j-2l) = \sum_{l=1}^{15}(j(2-2l) - 2(2l) + (2l)^2)$$
$$= 21\sum_{l=1}^{15}2 - 21(2)\sum_{l=1}^{15}l - 2(2)\sum_{l=1}^{15}l + 4\sum_{l=1}^{15}l^2$$

$$\sum_{l=1}^{15}(3-2l)(j-2l) = \sum_{l=1}^{15}(j(3-2l) - 3(2l) + (2l)^2)$$
$$= 21\sum_{l=1}^{15}3 - 21(2)\sum_{l=1}^{15}l - 3(2)\sum_{l=1}^{15}l + 4\sum_{l=1}^{15}l^2$$

$$\vdots$$

$$\sum_{l=1}^{15}(25-2l)(j-2l) = \sum_{l=1}^{15}(j(25-2l) - 25(2l) + (2l)^2)$$

$$= 21\sum_{l=1}^{15} 25 - 21(2)\sum_{l=1}^{15} l - 25(2)\sum_{l=1}^{15} l + 4\sum_{l=1}^{15} l^2$$

Reemplazando estos resultados en (1.3):

$$(e_{12,21}) = 2(12)\Bigg[21\left(\sum_{l=1}^{15} 1 + \sum_{l=1}^{15} 2 + \sum_{l=1}^{15} 3 + \cdots + \sum_{l=1}^{15} 25\right) - 25(21)(2)\sum_{l=1}^{15} l$$
$$- (1+2+3+\cdots+25)(2)\sum_{l=1}^{15} l + 25(4)\sum_{l=1}^{15} l^2\Bigg]$$
$$= 2(12)\Bigg[21(15+(2)15+(3)15+\cdots+(25)15) - 25(21)(2)\frac{15(16)}{2}$$
$$- 25(26)\frac{15(16)}{2} + 25(4)\frac{15(16)31}{6}\Bigg]$$
$$= 537000$$

Nota:

En el álgebra de los números reales se verifica que:

1) Si $ab = ac$ y $a \neq 0 \Longrightarrow b = c$ (ley de la cancelación para la multiplicación)

2) Si $ad = 0 \Longrightarrow a = 0$ o $d = 0$.

Estos resultados no se verifican en el álgebra de las matrices. Veamos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) $AB = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} = AC$ y $A \neq 0 \not\Longrightarrow B = C$

2) $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y sin embargo $A \neq 0$ y $D \neq 0$

Ejercicio 1.1

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Usaremos el Principio de Inducción Matemática (PIM)

1) Demostraremos que la proposición se verifica para $n = 1$

$$\text{Si } n = 1 \Longrightarrow A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Supongamos que la proposición se cumple para $n = h$. Es decir:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h & 1 \end{pmatrix} \text{ para } h \in \mathbb{Z}^+$$

3) Utilizando el carácter condicional del paso (2), demostraremos que la proposición se cumple para $n = h + 1$. En efecto:

$$A^{h+1} = A^h A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(h+1) & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.2

Si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinar todas las matrices de orden 4 que sean conmutables con A.

Sea

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix}$$

tal que $AB = BA$. Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

Operando los productos y usando la igualdad de matrices tenemos:

$$\begin{pmatrix} e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & e & f & g \\ 0 & i & j & k \\ 0 & m & n & p \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} e = i = j = m = n = p = 0 \\ f = k = q = a \\ g = l = b \\ h = c \end{cases}$$

Por tanto,

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

tal que $AB = BA$.

Ejercicio 13

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

donde $AB = BA = O$, $AC = A$, $CA = C$

Hallar:

a) ACB

b) CBA

c) $A^2 + B^2$

d) $(A + B)^2$

e) $(A - B)^2$

En efecto:

a) $ACB = (AC)B = AB = O$

b) $CBA = C(BA) = CO = O$

c) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + O + O + B^2 = A^2 + B^2$

$$A^2 + B^2 = (A+B)^2 = (A+B)(A+B) = (I)(I) = I^2 = I$$

d) $(A+B)^2 = I^2 = I$

e) $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - O - O + B^2 = A^2 + B^2 = I$

Nota

1) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

2) $(AB)^2 \neq A^2B^2$

3) Si $AB = BA \Longrightarrow \begin{cases} (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (AB)^2 = A^2B^2 \end{cases}$

Definición 1.17

Una matriz cuadrada A de orden n se llama **matriz idempotente** si $A^2 = A$.

Ejemplo 1.22

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente, puesto que $A^2 = A$

2) $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente, puesto que $B^2 = B$



Definición 1.18

Una matriz cuadrada A de orden n se llama **matriz nilpotente** si $A^p = O$ para $p \in \mathbb{Z}^+$.

Nota

Si p es el menor entero positivo tal que $A^p = O$ entonces se dice que A es una **matriz nilpotente de índice** p.

Ejemplo 1.23

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es nilpotente de índice 3, ya que $A^3 = O$.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es nilpotente de índice 2, ya que $A^2 = O$

Definición 1.19

Una matriz cuadrada A de orden n se llama **matriz involutiva** si $A^2 = I$.

Ejemplo 1.24

1) I es involutiva, puesto que $I^2 = I$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ es involutiva, puesto que $A^2 = I$.

3) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva, puesto que $B^2 = I$.

Definición 1.20

Sea $A = (a_{ij})_n$ una matriz cuadrada de orden n, la traza de A, denotada por traza(A) es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir:

$$\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Ejemplo 1.25

1) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{traza}(A) = 1 + 4 + (-6) = -1$$

2) Si I es la matriz identidad de orden $n \Longrightarrow \text{traza}(I) = n$

Propiedades

1) $\text{traza}(A + B) = \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$

2) $\text{traza}(kA) = k\ \text{traza}(A)$

3) $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$

Demostración. 1) Si A y B son matrices cuadradas de orden n entonces $A + B$ es una matriz cuadrada de orden n

$$A = (a_{ij})_n,\ B = (b_{ij})_n \Longrightarrow A + B = C = (c_{ij})_n \text{ donde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{traza}(A + B) &= \text{traza}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \text{traza}(A) + \text{traza}(B) \end{aligned}$$

2) $\text{traza}(kA) = \sum_{i=1}^{n} ka_{ii} = k \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\ \text{traza}(A).$

3) Por simplicidad, vamos a demostrar para un caso particular

$$\text{Si } A = (a_{ik})_{3\times 2} \text{ y } B = (b_{ki})_{2\times 3} \Longrightarrow AB_{3\times 3} \text{ y } BA_{2\times 2}$$

$$AB = C_{3\times 3} = (c_{ii}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik} b_{ki}$$

$$\begin{aligned} \text{traza}(AB) &= \text{traza}(C) = c_{11} + c_{22} + c_{33} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$BA = D_{2\times 2} = (d_{ii}) = \sum_{k=1}^{3} b_{ki} a_{ik}$$

$$\begin{aligned} \text{traza}(BA) &= \text{traza}(D) = d_{11} + d_{22} \\ &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5): $\text{traza}(AB) = \text{traza}(BA)$.

◇

1.1.3 Ejercicios propuestos

1) Si A es una matriz involutiva

(a) D. q. $\frac{1}{2}(I + A)$ y $\frac{1}{2}(I - A)$ son matrices idempotentes

(b) Determinar $\frac{1}{2}(I + A)\frac{1}{2}(I - A)$

2) Si A y B son matrices cuadradas de orden n conmutativas, donde $C = A + B$ y B matriz nilpotente de índice 2. Demostrar que

$$C^{n+1} = A^n(A + (n+1)B), \ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

3) Si $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Calcular A

Rpta: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4) Encontrar todas las matrices que satisfacen las siguientes ecuaciones matriciales:

(a) $A^2 - 5A + 7I_2 = O$

(b) $2A^3 + 3A^2 - 4A - 6I_2 = O$

(c) $A^3 - I_3 = O$

(d) $A^3 - A = O$

5) Demostrar que la matriz A es una solución de la ecuación (a) del ejercicio anterior. Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6) Indicar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas

(a) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(b) $(AB)^2 = A^2B^2$

(c) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ si $AB = BA$

(d) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

7) Si A es una matriz cuadrada no nula y $AB = rB$, $r \in \mathbb{R}$ entonces $A^nB = r^nB$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.



1.1.4 Matriz transpuesta

Definición 1.21

Sea A una matriz de orden $m \times n$. **La matriz transpuesta de** A, denotada por A^T, es la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene intercambiando las filas por las columnas de A. Es decir:

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{m \times n} \Longrightarrow A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Ejemplo 1.26

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

donde observamos que:

la 1ª fila de A es la 1ª columna de A^T, la 2ª fila de A es la 2ª columna de A^T, la 3ª fila de A es la 3ª columna de A^T o también la 1ª columna de A es la 1ª fila de A^T y la 2ª columna de A es la 2ª fila de A^T

Propiedades

Si A y B son matrices de orden $m \times n$, entonces:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(A - B)^T = A^T - B^T$

4) $(rA)^T = rA^T;\ r \in \mathbb{R}$

5) $(AB)^T = B^T A^T$ si A es de orden $m \times p$ y B de orden $p \times n$.

La demostración de estas propiedades es aplicación directa de la definición. Demostraremos la propiedad (5).

Sea

$$A = (a_{ik})_{m\times p} \Longrightarrow A^T = (a_{ki})_{p\times m} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$
$$k = 1,2,\ldots,p$$
$$B = (b_{kj})_{p\times n} \Longrightarrow B^T = (b_{jk})_{n\times p} \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

a) Analizando el orden de las matrices

$$\text{Si } (AB)_{m\times n} \Longrightarrow (AB)^T_{n\times m} \qquad \underbrace{B^T{}_{n\times p} \; A^T{}_{p\times m}}_{n\times m}$$

Luego, $(AB)^T$ y $B^T A^T$ tienen el mismo orden.

b) Analizando los términos correspondientes de las matrices

$$AB = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}, \text{ si } AB = D = (d_{ij})_{m\times n} \Longrightarrow D^T = (d_{ji})_{n\times m}$$

y

$$(d_{ji}) = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}a_{ki} = (AB)^T \tag{1.6}$$

Calculamos el elemento genérico de $B^T A^T$

$$B^T A^T = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}a_{ki} \tag{1.7}$$

De (1.6) y (1.7) se deduce que las matrices $(AB)^T$ y $B^T A^T$ tienen el mismo elemento genérico. Por tanto, queda demostrada la igualdad de las dos matrices.

Definición 1.22

Sea $A = (a_{ij})_n$ una matriz cuadrada de orden n. A se llama **matriz simétrica** si y solo si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo par i, j. Es decir

$$A \text{ es simétrica} \Longleftrightarrow A = A^T$$

Ejemplo 1.27

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{ es simétrica puesto que } A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = A$$

Nota

En una matriz simétrica los elementos de la diagonal principal son los mismos y los elementos con subíndices intercambiados a_{12} y a_{21}, a_{13} y a_{31}, a_{23} y a_{32} son iguales entre si.

Propiedades

1) Si una matriz A es simétrica $\Longrightarrow rA$ es simétrica; $\forall r \in \mathbb{R}$.

2) Si A es una matriz cuadrada de orden $n \Longrightarrow A + A^T$ es simétrica.

Demostración.

1) Si A es una matriz simétrica $\Longrightarrow A = A^T$ (por definición)

$$(rA)^T = rA^T = rA \text{ (por hipótesis)}$$

entonces si $(rA)^T = rA \Longrightarrow rA$ es simétrica $\forall r \in \mathbb{R}$.

2) Debemos demostrar que $(A + A^T)$ es simétrica. Entonces

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

entonces si $(A + A^T)^T = A + A^T \Longrightarrow A + A^T$ es simétrica.

◇

Definición 1.23

Sea $A = (a_{ij})_n$ una matriz cuadrada de orden n. A se llama **matriz antisimétrica** si y solo si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo par i, j. Es decir:

$$A \text{ es antisimétrica } \Longleftrightarrow A = -A^T$$

Ejemplo 1.28

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica ya que

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ -3 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Nota

1) En una matriz antisimétrica para que $a_{ii} = -a_{ii} \Longrightarrow a_{ii} = 0$, es decir cada uno de los elementos de la diagonal principal es igual a cero.

2) Los elementos con subíndices intercambiados a_{12} y a_{21}, a_{13} y a_{31}, a_{23} y a_{32} tienen signos opuestos entre sí.

Propiedades

1) Si una matriz A es antisimétrica $\Longrightarrow rA$ es antisimétrica, $\forall r \in \mathbb{R}$.

2) si A es una matriz cuadrada de orden $n \Longrightarrow A - A^T$ es antisimétrica.

Demostración.

1) Si A es una matriz antisimétrica $\Longrightarrow A = -A^T$ (por definición)

$$(rA)^T = rA^T = r(-A) = -(rA) \text{ (por hipótesis)}$$

entonces si $(rA)^T = -(rA) \Longrightarrow rA$ es antisimétrica, $\forall r \in \mathbb{R}$.

2) Debemos demostrar que $(A - A^T)$ es antisimétrica. Entonces:

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T)$$

entonces si $(A - A^T)^T = -(A - A^T) \Longrightarrow A - A^T$ es antisimétrica.

◇

Nota

En consecuencia, toda matriz cuadrada A de orden n se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. En efecto:

$$\frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)=A$$

1.1.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.4

Sean las matrices $A=(a_{ij})_{20\times 40}=(i+1)$, $B=(b_{ij})_{40\times 20}=(i-1)$, $C=(c_{ij})_{20\times 40}=(i+j)$, $D=(d_{ij})_{40\times 20}=(ij)$

a) Determinar el término general de $E=D(C-B^T-A)D$

b) Si $F=CD+E^TE$, calcular el término $(f_{7,20})$

Solución.

a) $D_{40\times 20}(C-B^T-A)_{20\times 40}D_{40\times 20}=E_{40\times 20}$

$$C-B^T-A=M=(m_{ij})_{20\times 40}$$
$$(m_{ij})=(i+j)-(j-1)-(i+1)=0$$
$$E=DMD=DOD=O_{40\times 20}$$

b) $F=CD+E^TE$

$$E=(e_{ij})_{40\times 20}=O\Longrightarrow E^T=(e_{ji})_{20\times 40}=O$$
$$E^TE=O_{20\times 40}O_{40\times 20}=O_{20\times 20}$$
$$F=C_{20\times 40}D_{40\times 20}+O_{20\times 20}=CD_{20\times 20}+O_{20\times 20}=CD_{20\times 20}$$

$$C=(c_{ik})_{20\times 40}=(i+k)\qquad i=1,2,\ldots,20$$
$$k=1,2,\ldots,40$$
$$D=(d_{kj})_{40\times 20}=(kj)\qquad j=1,2,\ldots,20$$

$$CD = \sum_{k=1}^{40} c_{ik} d_{kj} = (f_{ij}) = F$$

$$(f_{ij}) = \sum_{k=1}^{40} (i+k)(kj) = \sum_{k=1}^{40} (ijk + k^2 j)$$

$$= ij \sum_{k=1}^{40} k + j \sum_{k=1}^{40} k^2$$

$$= 7(20)\frac{40(41)}{2} + 20\frac{40(41)(81)}{6}$$

$i = 7, j = 20$ $$= 557600$$

Ejercicio 1.5

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{20\times 10} = (ij)$, $B = (b_{ij})_{10\times 5} = (i)$, $C = (c_{ij})_{5\times 20} = (i+j)$, $D = ABC$.

a) Calcular el elemento genérico de la matriz D y $(d_{15,12})$.

b) Si $M = D + D^T$. Calcular $(m_{15,12})$ y $(m_{12,15})$

Solución.

a) Determinamos las matrices de modo que el producto se pueda realizar

$$A = (a_{ik})_{20\times 10} \qquad i = 1, 2, \ldots, 20$$

$$B = (b_{kl})_{10\times 5} \qquad k = 1, 2, \ldots, 10$$

$$C = (c_{lj})_{5\times 20} \qquad l = 1, 2, \ldots, 5$$

$$j = 1, 2, \ldots, 20$$

$$A_{20\times 10} \; B_{10\times 5} \; C_{5\times 20} = D_{20\times 20}$$

20×5

20×20

$$D = ABC = (AB)C$$



$$AB = \sum_{k=1}^{10} a_{ik} b_{kl} = (x_{il}) = X_{20\times 5}$$

$$(AB)C = XC = \sum_{l=1}^{5} x_{il} c_{lj} = (d_{ij}) = D_{20\times 20}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
(d_{ij}) &= \sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{10} a_{ik} b_{kl}\right) c_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{10} (ik)k\right)(l+j) \\
&= \sum_{l=1}^{5}\left(i\sum_{k=1}^{10} k^2\right)(l+j) \\
&= \left(i\sum_{k=1}^{10} k^2\right)\sum_{l=1}^{5}(l+j)
\end{aligned}$$

$i = 15,\ j = 12$

$$\begin{aligned}
(d_{15,12}) &= \left(15\sum_{k=1}^{10} k^2\right)\sum_{l=1}^{5}(l+12) \\
&= 15\frac{10(11)(21)}{6}\left(\sum_{l=1}^{5} l + 12\sum_{l=1}^{5} 1\right) \\
&= 25(11)(21)\left(\frac{5(6)}{2} + 12(5)\right) \\
&= 25(11)(21)(75) \\
&= 433125
\end{aligned}$$

b) $M = D + D^T \Longrightarrow M$ es una matriz simétrica de orden 20

$$D = (d_{ij}) \Longrightarrow D^T = (d_{ji}) = \sum_{l=1}^{5} c_{jl}\left(\sum_{k=1}^{10} b_{lk} a_{ki}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{5}(j+l)\left(\sum_{k=1}^{10} l(ki)\right)$$
$$= \sum_{l=1}^{5}(j+l)(li)\sum_{k=1}^{10} k$$

$$(d_{ji}) = i\sum_{k=1}^{10} k\left(\sum_{l=1}^{5}(jl+l^2)\right)$$
$$(d_{12,15}) = 15\frac{(10)(11)}{2}\left(j\sum_{l=1}^{5} l + \sum_{l=1}^{5} l^2\right)$$
$$= 15(5)(11)\left(12\frac{5(6)}{2} + \frac{5(6)(11)}{6}\right)$$
$$= 825(180+55) = 193875$$

$$M = (m_{ij}) = d_{ij} + d_{ji}$$
$$(m_{15,12}) = (d_{15,12}) + (d_{12,15}) = 433125 + 193875 = 627000$$
$$M = M^T \Longrightarrow (m_{12,15}) = (m_{15,12}) = 627000$$

Ejercicio 1.6

Sea $D^T = CB^TA^T$ donde $A = (a_{ij})_{30\times 20} = (i)$, $B = (b_{ij})_{20\times 10} = (j)$, $C = (c_{ij})_{15\times 10} = (i-j)$. Calcular el elemento de la fila 10 y columna 18 de la matriz D^T.

Solución.

$$C_{15\times 10} \quad B^T_{10\times 20} \quad A^T_{20\times 30} = D^T_{15\times 30}$$

15×20

15×30

$$C = (c_{ik})_{15\times 10} \qquad i = 1,2,\ldots,15$$

$$B^T = (b_{kl})_{10\times 20} \qquad k = 1,2,\ldots,10$$
$$A^T = (a_{lj})_{20\times 30} \qquad l = 1,2,\ldots,20$$
$$j = 1,2,\ldots,30$$

$$D^T = CB^TA^T = C(B^TA^T)$$

$$B^TA^T = \sum_{l=1}^{20} b_{kl}a_{lj} = (x_{kj}) = X_{10\times 30}$$

$$C(B^TA^T) = CX = \sum_{k=1}^{10} c_{ik}x_{kj} = (y_{ij}) = Y_{15\times 30} = D^T$$

$$(y_{ij}) = \sum_{k=1}^{10} c_{ik}\left(\sum_{l=1}^{20} b_{kl}a_{lj}\right) = \sum_{k=1}^{10}(i-k)\left(\sum_{l=1}^{20} l(l)\right)$$
$$= \left(\sum_{l=1}^{20} l^2\right)\sum_{k=1}^{10}(i-k)$$

$$(y_{10,18}) = \left(\sum_{l=1}^{20} l^2\right)\left(i\sum_{k=1}^{10}1 - \sum_{k=1}^{10}k\right)$$
$$= \frac{20(21)(41)}{6}\left(10(10) - \frac{10(11)}{2}\right)$$
$$= 129150$$

Otro método

$$D^T = CB^TA^T \Longrightarrow D = ABC^T$$

$$A_{30\times 20}\; B_{20\times 10}\; C^T_{10\times 15} = D_{30\times 15}$$

30×10

30×15

$$A = (a_{ik})_{30\times 20} \qquad i = 1,2,\ldots,30$$

$$B = (b_{kl})_{20\times 10} \qquad k = 1, 2, \ldots, 20$$
$$C^T = (c_{lj})_{10\times 15} \qquad l = 1, 2, \ldots, 10$$
$$j = 1, 2, \ldots, 15$$

$$D = ABC^T = (AB)C^T$$

$$AB = \sum_{k=1}^{20} a_{ik}b_{kl} = (x_{il}) = X_{30\times 10}$$

$$(AB)C^T = XC^T = \sum_{l=1}^{10} x_{il}c_{lj} = (d_{ij}) = D_{30\times 15}$$

$$(d_{ij}) = \sum_{l=1}^{10}\left(\sum_{k=1}^{20} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}$$

el elemento genérico de $D^T = (d_{ji})_{15\times 30}$

$$(d_{ji}) = \sum_{l=1}^{10} c_{jl}\left(\sum_{k=1}^{20} b_{lk}a_{ki}\right)$$

Si $j = 10,\ i = 18 \Longrightarrow (d_{10,18}) = \sum_{l=1}^{10}(j-l)\left(\sum_{k=1}^{20} k(k)\right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{20} k^2\right)\sum_{l=1}^{10}(j-l)$$

$$= \frac{20(21)(41)}{6}\left(j\sum_{l=1}^{10} 1 - \sum_{l=1}^{10} l\right)$$

$$= 10(7)(41)\left(10(10) - \frac{10(11)}{2}\right)$$

$$= 2870(45) = 129150$$

Ejercicio 1.7

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{40\times10} = (|3-j|)$, $B = (b_{ij})_{20\times5} = (j^2)$, $C = (c_{ij})_{30\times5} = (ij)$, $D = ABC^T$

a) Calcular el elemento (d_{ij}) de la matriz D.

b) Calcular $(d_{40,25})$

Solución.

a)

Hacemos

$$A_{40\times10}\ B_{10\times5}\ C^T_{5\times30} = D_{40\times30}$$

40×5

40×30

$$A = (a_{ik})_{40\times10} \qquad i = 1,2,\ldots,40$$

$$B = (b_{kl})_{10\times5} \qquad k = 1,2,\ldots,10$$

$$C^T = (c_{lj})_{5\times30} \qquad l = 1,2,\ldots,5$$

$$j = 1,2,\ldots,30$$

$$D = ABC^T = (AB)C^T$$

$$AB = \sum_{k=1}^{10} a_{ik}b_{kl} = (x_{il}) = X_{40\times5}$$

$$(AB)C^T = XC^T = \sum_{l=1}^{5} x_{il}c_{lj} = (d_{ij}) = D_{40\times30}$$

$$\begin{aligned}
(d_{ij}) &= \sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{10} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} \\
&= \sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{10} |3-k|l^2\right)(lj) = \sum_{l=1}^{5}\left(l^2\sum_{k=1}^{10} |3-k|\right)(lj) \\
&= \sum_{k=1}^{10} |3-k| \sum_{l=1}^{5} l^2(lj) = \sum_{k=1}^{10} |3-k|\left(j\sum_{l=1}^{5} l^3\right)
\end{aligned}$$

$$= j\sum_{k=1}^{10}|3-k|\left(\sum_{l=1}^{5} l^3\right)$$

b)

$$i = 40,\ j = 25 \Longrightarrow (d_{40,25}) = 25\sum_{k=1}^{10}|3-k|\left(\frac{5^2(6)^2}{4}\right)$$

$$= 25(225)\sum_{k=1}^{10}|3-k|$$

$$\sum_{k=1}^{10}|3-k| = (2+1)+0+1+2+3+4+5+6+7 = 3+\frac{7(8)}{2} = 31$$

$$(d_{40,25}) = 25(225)(31) = 174375$$

Ejercicio 1.8

Sean las matrices $A = (a_{ij})_{20\times 8} = |i+j|$, $B = (b_{ij})_{8\times 20} = i(j-i)$, $C = (c_{ij})_{8\times 8} = ij$ y $D = (A^T B^T + I)C^T$

a) Hallar el término genérico de la matriz D^T.

b) Calcular el valor del elemento $(d_{5,6})$.

Solución.

a) $D = (A^T B^T + I)C^T = A^T B^T C^T + C^T$

C es una matriz cuadrada y simétrica $\Longrightarrow C = C^T$

$$D = A^T B^T C + C = M + C \text{ donde } M = A^T B^T C$$

$$A^T_{8\times 20}\ B^T_{20\times 8}\ C_{8\times 8} = M_{8\times 8},\qquad D = (M+C)_{8\times 8}$$

($A^T B^T$: 8×8; $(A^T B^T)C$: 8×8)

$$A^T = (a_{ik})_{8\times 20} \qquad i = 1, 2, \ldots, 8$$

$$B^T = (b_{kl})_{20\times 8} \qquad k = 1, 2, \ldots, 20$$

$$C = (c_{lj})_{8\times 8} \qquad l = 1, 2, \ldots, 8$$

$$j = 1, 2, \ldots, 8$$

$$M = A^T B^T C = (A^T B^T) C$$

$$A^T B^T = \sum_{k=1}^{20} a_{ik} b_{kl} = (x_{il}) = X_{8\times 8}$$

$$(A^T B^T) C = XC = \sum_{l=1}^{8} x_{il} c_{lj} = (m_{ij}) = M_{8\times 8}$$

$$(m_{ij}) = \sum_{l=1}^{8} \left(\sum_{k=1}^{20} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj}$$

$$D = M + C \Longrightarrow (d_{ij}) = (m_{ij} + c_{ij}) = \left(\sum_{l=1}^{8} \left(\sum_{k=1}^{20} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} + c_{ij} \right)$$

$$D^T = (M + C)^T = M^T + C^T$$

$$(d_{ji}) = \sum_{l=1}^{8} c_{jl} \left(\sum_{k=1}^{20} b_{lk} a_{ki} \right) + c_{ji}$$

b)

$$(d_{ij}) = (m_{ij} + c_{ij}) \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
(m_{ij}) &= \sum_{j=1}^{8} \left(\sum_{k=1}^{20} |i + k| k (l - k) \right) lj \\
&= \sum_{l=1}^{8} \left(\sum_{k=1}^{20} |i + k| kl - \sum_{k=1}^{20} |i + k| k^2 \right) lj \\
&= j \sum_{l=1}^{8} \left(l \sum_{k=1}^{20} |i + k| k - \sum_{k=1}^{20} |i + k| k^2 \right) l \\
&= j \left(\sum_{k=1}^{20} |i + k| k \right) \sum_{l=1}^{8} l^2 - j \left(\sum_{k=1}^{20} |i + k| k^2 \right) \sum_{l=1}^{8} l
\end{aligned} \tag{1.9}$$

$i = 5,\ j = 6$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} |i+k|k &= \sum_{k=1}^{20} |5+k|k = \sum_{k=1}^{20}(5+k)k \\ &= 5\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{5(20)(21)}{2} + \frac{20(21)41}{6} \\ &= 3920\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} |i+k|k^2 &= \sum_{k=1}^{20} |5+k|k^2 = \sum_{k=1}^{20}(5+k)k^2 \\ &= 5\sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k^3 = 5\frac{20(21)(41)}{6} + \frac{(20)^2(21)^2}{4} \\ &= 14350 + 44100 = 58450\end{aligned}$$

Reemplazando en (1.9):

$$(m_{56}) = 6(3920)\frac{8(9)(17)}{6} - 6(58450)\frac{8(9)}{2} = -7827120$$

en(1.8)

$$(d_{56}) = (m_{56} + c_{56}) = (-7827120 + (5)(6)) = -7827090$$

Ejercicio 1.9

Sean las matrices cuadradas A, B y C de orden 15, donde $A = (a_{ij}) = (i + j)$, $B = (b_{ij}) = \min\{i, j\}$, $C = (c_{ij}) = (ij)$, $D = (BC)^T A + (ABC)^T$

a) Calcular el elemento general (d_{ij}) de la matriz D.

b) Hallar los elementos $(d_{10,8})$ y $(d_{8,10})$ de la matriz D.

Solución.

a) Observamos que A, B y C son matrices simétricas $\Longrightarrow A = A^T$, $B = B^T$ y $C = C^T$

$$D = (BC)^T A + (ABC)^T = C^T B^T A + C^T B^T A^T$$
$$= CBA + CBA = 2CBA$$

Hacemos

$$C = (c_{ik})_{15} \qquad i = 1, 2, \ldots, 15$$
$$B = (b_{kl})_{15} \qquad k = 1, 2, \ldots, 15$$
$$A = (a_{lj})_{15} \qquad l = 1, 2, \ldots, 15$$
$$j = 1, 2, \ldots, 15$$

$$CBA = (CB)A$$

$$CB = \sum_{k=1}^{15} c_{ik} b_{kl} = (x_{il}) = X_{15\times 15}$$

$$(CB)A = XA = \sum_{l=1}^{15} x_{il} a_{lj} = (y_{ij}) = Y_{15\times 15}$$

$$(y_{ij}) = \sum_{l=1}^{15} \left(\sum_{k=1}^{15} c_{ik} b_{kl} \right) a_{lj}$$

$$D = 2CBA \Longrightarrow (d_{ij}) = 2(y_{ij}) = 2 \sum_{l=1}^{15} \left(\sum_{k=1}^{15} c_{ik} b_{kl} \right) a_{lj}$$

b)

$$(d_{ij}) = 2 \sum_{l=1}^{15} \left(\sum_{k=1}^{15} (ik) \min\{k, l\} \right) (l + j)$$
$$= 2 \sum_{l=1}^{15} \left(i \sum_{k=1}^{15} k \min\{k, l\} \right) (l + j) \qquad i = 10, j = 8$$

$$(d_{10,8}) = 2\sum_{l=1}^{15} 10\left(\sum_{k=1}^{15} k \min\{k,l\}\right)(l+8)$$

$$(d_{10,8}) = 20\sum_{l=1}^{15}\left(\sum_{k=1}^{15} k \min\{k,l\}\right)(l+8) \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{15}\left(\sum_{k=1}^{15} k \min\{k,l\}\right)(l+8)\\
&= 9\sum_{k=1}^{15} k\min\{k,1\} + 10\sum_{k=1}^{15} k\min\{k,2\} + 11\sum_{k=1}^{15} k\min\{k,3\} +\\
&\quad \cdots + 22\sum_{k=1}^{15} k\min\{k,14\} + 23\sum_{k=1}^{15} k\min\{k,15\}\\
&= 9\sum_{p=1}^{15} p + 10\left(\sum_{p=1}^{2} p^2 + 2\sum_{p=3}^{15} p\right) + 11\left(\sum_{p=1}^{3} p^2 + 3\sum_{p=4}^{15} p\right) +\\
&\quad \cdots + 22\left(\sum_{p=1}^{14} p^2 + 14\sum_{p=15}^{15} p\right) + 23\sum_{p=1}^{15} p^2\\
&= 215668
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Reemplazando (1.11) en (1.10) se tiene

$$(d_{10,8}) = 20(215668) = 4313360$$

De manera semejante, obtenemos

$$\begin{aligned}
(d_{8,10}) &= 2\sum_{l=1}^{15} 8\left(\sum_{k=1}^{15} k \min\{k,l\}\right)(l+10)\\
&= 16(239748) = 3835968
\end{aligned}$$

1.1.6 Ejercicios propuestos

1) Demostrar que si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces $(A^T B^T)^T = BA$.

2) Si A es una matriz simétrica, qué se puede decir de la matriz AA^T.

3) Si A es una matriz antisimétrica, qué se puede decir de los elementos de la diagonal principal de AA^T.

4) Demostrar que AA^T es una matriz simétrica para toda matriz A.

5) Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden y $(A^n - rI)^T$ y $(B^n - rI)^T$ son conmutativas, entonces A^n y B^n son matrices conmutativas.

6) Si A, B, C, D son matrices cuadradas de orden 2 y $n \in \mathbb{Z}^+$

$$C^4 A - 2B^T = DC^n, \; A^T + (C^T)^n B = D^T,$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar $(CB^T C + 2B^T)^4$

7) Sean las matrices $A = (a_{ij})_{30\times5} = (j-i)$, $B = (b_{ij}) = (ij)$ y $C = (c_{ij}) = (\min\{i,j\})$ matrices cuadradas de orden 5, $D = (d_{ij})_{5\times30} = (2i + j)$. Si $A(BC)^T D = E = (e_{ij})$

(a) Calcular el término genérico (e_{ij}) de E.

(b) Calcular $(e_{15,15})$

Rpta:

(a) $$(e_{ij}) = \sum_{r=1}^{5}\left(\sum_{l=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{5} a_{ik}c_{kl}\right)b_{lr}\right)d_{rj}$$

(b) $(e_{15,15}) = -729965$

8) Dadas las matrices $A_{20\times10}, B_{10\times15}, C_{15\times20}, D_{20\times10}$ donde $A = (a_{ij}) = (i)$, $B = (b_{ij}) = (i-j)$, $C = (c_{ij}) = (j)$, $D = (d_{ij}) = (i+j)$. Si $E = (CD)^T(AB)^T$

(a) Calcular el término genérico de (e_{ij}) de E.

(b) Calcular el elemento que se encuentra en la fila 8 y columna 8 de E.

9) Sean las matrices $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times q}, C = (c_{ij})_{q\times r}, D = (d_{ij})_{r\times n}$

(a) Si $E = ABCD$, indicar el elemento genérico de E.

(b) Si $D = (d_{ij}) = (ij)$, $B = (b_{ij}) = (i + j)$, $A = D^T$, $A^T = C$ y $r = 20$. Hallar el elemento $(e_{7,9})$ y $(e_{9,7})$ de la matriz E.

Rpta:

(a) $(e_{ij}) = \sum_{l=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kl}\right)\left(\sum_{w=1}^{r} c_{lw}d_{wj}\right)$

(b) $(e_{7,9}) = 217948374000 = (e_{9,7})$

E es simétrica.

10) A y B son matrices cuadradas de orden n, C y D son matrices de orden $m\times p$ y $p\times m$ respectivamente. $m = 25$, $p = 15$ donde $A = (a_{ij}) = (i + j)$, $B = (b_{ij}) = (i - j)$, $C = (c_{ij}) = (i - 2j)$, $D = (d_{ij}) = (j - 2i)$, $E = (A + B)CD$

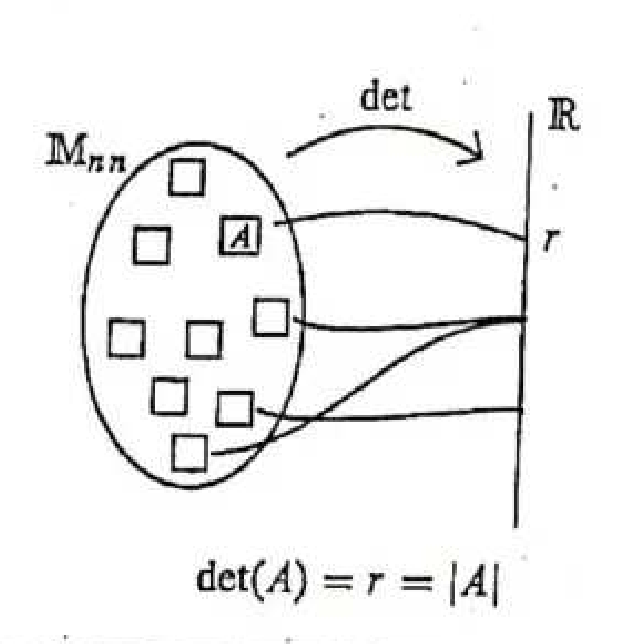
(a) Determinar el término genérico de E

(b) Calcular $(e_{12,21})$

1.2 Determinante de una matriz cuadrada

Definición 1.24

Sea $\mathbb{M}_{nn}$ el espacio de todas las matrices cuadradas de orden n y $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. La **función determinante** asigna a cada matriz $A \in \mathbb{M}_{nn}$ un único número real $r \in \mathbb{R}$, llamado **determinante de** A y se denota por $\det(A)$ o $|A|$.



$$\det(A) = r = |A|$$

Definición 1.25

Sea $\mathbb{M}_{22}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 2. La **función determinante** asigna a cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{22}$ un único número real $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ llamado **determinante de** A que se denota por $\det(A)$ o $|A|$. Es decir:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Un esquema para recordar el determinante de una matriz de orden 2

$$\det(A)) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$-$ $\quad$ $+$

(El producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria)

Definición 1.26

Sea $\mathbb{M}_{33}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden 3. La **función determinante** asigna a cada matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{33}$ un único número real $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$ llamado **determinante de** A, que se denota por $\det(A)$ o $|A|$.

Es decir:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Un esquema para recordar el determinante de una matriz de orden 3 es agregar las columnas 1 y 2 en ese orden

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \begin{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

En el esquema:

1) Las flechas que apuntan hacia la derecha tienen signo $+$ y las flechas que apuntan hacia la izquierda tienen signo $-$.

2) Cada flecha contiene el producto de tres elementos de A.

3) El determinante de A es la suma de los productos que contienen las flechas al emplear los signos adecuados que se determinaron.

Nota

1) Observamos que en cada producto hay un elemento de cada fila y de cada columna.

2) Este esquema sirve para calcular solo el determinante de una matriz de orden 3 y no para determinantes de mayor orden.

Los esquemas anteriores sirven para calcular determinantes de orden 2, de orden 3. Para matrices cuadradas de mayor orden hay que utilizar propiedades de los determinantes.

1.2.1 Propiedades de los determinantes

Propiedad 1

Si dos filas de una matriz cuadrada se intercambian, el valor del determinante cambia de signo.

Ejemplo 1.29

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Propiedad 2

Si la matriz B se obtiene de la matriz A al trasladar una de sus filas k lugares, entonces $|B| = (-1)^k|A|$.

Ejemplo 1.30

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad ; \quad k = 2$$

Propiedad 3

Si todo elemento de una fila de una matriz cuadrada es cero, entonces el valor del determinante es cero.

Ejemplo 1.31

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 4

Si todo elemento de una fila de una matriz cuadrada está multiplicado por un factor k, entonces el valor del determinante está multiplicado por k

Ejemplo 1.32

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Luego, si A es una matriz cuadrada de orden $n \Longrightarrow |kA| = k^n|A|$

Propiedad 5

Si a cada elemento de una fila se le suma el múltiplo de los elementos de otra fila, el valor del determinante no se altera.

Ejemplo 1.33

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{31} & a_{22}+ka_{32} & a_{23}+ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propiedad 6

Si dos filas de una matriz cuadrada son proporcionales, entonces el valor del determinante es cero.

Ejemplo 1.34

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 7

El valor del determinante de una matriz cuadrada no se altera si se intercambian las filas por las columnas. Es decir $|A| = |A^T|$.

Nota

Esta propiedad es muy importante puesto que nos permite afirmar que todas las propiedades dadas para las filas también se verifican para las columnas.

Propiedad 8

El valor del determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Nota

1) Para calcular el determinante de una matriz cuadrada, es ventajoso introducir ceros tratando de construir una matriz triangular (superior o inferior) que usa las propiedades para las filas o columnas indistintamente.

2) Un procedimiento para calcular el determinante de una matriz de una manera considerablemente simplificada es por anular en una misma fila o columna todos los elementos, excepto uno que se llama pivote.

3) Pivote es el elemento a partir del cual anulamos los demás elementos de su fila o columna, usando las propiedades de los determinantes.

4) De preferencia se debe elegir como pivote el número 1 con el fin de operar con números enteros.

Ejemplo 1.35

Usando las propiedades, calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Operando con filas, introducimos ceros para construir una matriz triangular superior.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{trasladar } f_3 \text{ a } f_1} (-1)^2 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4-2f_1]{\substack{f_2-3f_1 \\ f_3-2f_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_4-f_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) Operando con columnas, introducimos ceros para construir una matriz triangular inferior.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_3} \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3-2c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_4-c_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Observamos que:

para evitar trabajar con números racionales, se busca colocar 1 como pivote en el lugar a_{11}

Ejemplo 1.36

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ -a & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{en } f_2 \text{ y } f_3]{\text{factor común}} (-a)^2 \begin{vmatrix} a+b & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 \times f_1} -a^2 \begin{vmatrix} ① & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a+b & b & b \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-(a+b)f_1]{f_2-f_1} -a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & b & a+2b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+bf_2} -a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a+3b \end{vmatrix} = a^2(a+3b)$$

2° método

$$\begin{vmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+\sum f_i} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } f_1]{\text{factor común}} (a+3b) \begin{vmatrix} ① & 1 & 1 \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-bf_1]{f_2-bf_1} (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a+3b)$$

Observamos que el 2° método es más corto, ya que por regla de formación de la matriz se puede obtener un factor común para tener 1 como pivote y poder introducir ceros más fácilmente.

Ejemplo 1.37

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+\sum f_i} \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } f_1]{\text{factor común}} (x+y+z)\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-(2z)f_1]{f_2-(2y)f_1} (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & -(x+y+z) \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

Ejemplo 1.38

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+\sum f_i} \begin{vmatrix} a+4 & a+4 & a+4 & a+4 & a+4 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_1,\ c_5-c_1]{c_2-c_1,\ c_3-c_1} \begin{vmatrix} a+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a-4 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2+f_4} \begin{vmatrix} a+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a-4 & 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4-c_2}\begin{vmatrix} a+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{f_4-2f_5} \begin{vmatrix} a+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a-2 & 4-2a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_5+2c_4}\begin{vmatrix} a+4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = a(a^2-4)(a^2-16)$$

Observamos que en este caso se han combinado las propiedades de los determinantes por filas y por columnas para obtener una matriz triangular inferior.

1.2.2 . Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.10

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1+\sum f_i} \begin{vmatrix} 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 & 2x+1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } f_1]{\text{factor común}} (2x+1)\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[f_4-xf_1]{f_3-f_1} (2x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 0 & x-1 & x-1 & -1 \\ 0 & -x & 1-x & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4+f_2]{f_3-f_2} (2x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2+xf_3} (2x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \text{ a } f_4]{\text{trasladar}} (2x+1)(-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2x \end{vmatrix} = (2x+1)(2x-1) = 4x^2-1$$

Ejercicio 1.11

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_4-4f_2]{f_3-f_1} \begin{vmatrix} \textcircled{1} & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-x^3f_1} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x^2-x^4 & x-x^5 & 1-x^6 \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x^2(1-x^2) & x(1-x^4) & (1-x^2)(1+x^2+x^4) \\ 0 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \text{ y } f_3]{\text{factor común}} x(1-x^2) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x^2 & x(1+x^2) & 1+x^2+x^4 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & -x^2 & -2x & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4+x^2 f_3} x(1-x^2) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & x^2 & x(1+x^2) & 1+x^2+x^4 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2(x^3-x) & 3(x^4-1) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} -x(1-x^2) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2x & 3x^2 \\ 0 & x^2 & x+x^3 & 1+x^2+x^4 \\ 0 & 0 & 2x(x^2-1) & 3(x^2-1)(x^2+1) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 - x^2 f_2]{\text{factor común } f_4} -x(1-x^2)(x^2-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & x-x^3 & 1+x^2-2x^4 \\ 0 & 0 & 2x & 3(x^2+1) \end{vmatrix}$$

$$= x(1-x^2)^2 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & x(1-x^2) & (1-x^2)(1+2x^2) \\ 0 & 0 & 2x & 3(x^2+1) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3]{\text{factor común}} x(1-x^2)^3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & x & 1+2x^2 \\ 0 & 0 & 2x & 3x^2+3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4-2f_3} x(1-x^2)^3 \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & x & 1+2x^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x^2 \end{vmatrix} = x^2(1-x^2)^4$$

Ejercicio 1.12

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_3\times f_1} - \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_2 \text{ y } c_3]{\text{factor común}} -(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \textcircled{1} & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2} -(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & (c^2-b^2)+a(c-b) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_3]{\text{factor común}} -(b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(b-c)(a+b+c)$$

Nota

En adelante, por razones de espacio, los factores delante del determinante los escribimos en columna, como en el ejercicio siguiente.

Ejercicio 1.13

Determinante de Vandermonde[1] de orden 4

Solución.

$$\begin{vmatrix} ① & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-c_1]{\substack{c_2-c_1 \\ c_3-c_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2,\, c_3,\, c_4]{\text{factor común en}} \begin{matrix} (b-a) \\ (c-a) \\ (d-a) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & ① & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a & d+a \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-c_2]{c_3-c_2} \begin{matrix} (b-a) \\ (c-a) \\ (d-a) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b & d-b \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & (c^2-b^2)+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_3,\, c_4]{\text{factor común}} \begin{matrix} (b-a) \\ (c-a) \\ (d-a) \\ (c-b) \\ (d-b) \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & ① & 1 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c & a+b+d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4-c_3} (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & b+a & 1 & 0 \\ a^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c & d-c \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

[1] A.T. Vandermonde, matemático francés (1735–1796)

Ejercicio 1.14

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} \xrightarrow{xc_1,\, yc_2,\, zc_3} \frac{1}{xyz} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 \text{ a } f_1]{\text{trasladar}} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y)$$

Se ha reducido a un determinante de Vandermonde de orden 3

Ejercicio 1.15

Calcular el siguiente determinante de orden n. En este caso, se necesita precisar el orden de la matriz

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n =$$

$$\xrightarrow{f_1+\sum f_i} \begin{vmatrix} (n-1)x & (n-1)x & (n-1)x & \cdots & (n-1)x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 0 \end{vmatrix}_n =$$

$$\xrightarrow[\text{en } f_1]{\text{factor común}} (n-1)x \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x & 0 & x & \cdots & x & x \\ x & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}_n =$$

$$\xrightarrow[\substack{\vdots \\ f_n - x f_1}]{\substack{f_2 - x f_1 \\ f_3 - x f_1}} (n-1)x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x \end{vmatrix}_n =$$

$$= (n-1)x(-x)^{n-1} = (n-1)(-1)^{n-1}x^n$$

Ejercicio 1.16

Calcular el siguiente determinante de orden $n+1$, donde $x \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \cdots & x & x \\ 1 & x & 0 & \cdots & x & x \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & x & 0 \end{vmatrix}_{n+1}$$

Solución.

Si multiplicamos por x la 1ª fila y la 1ª columna, para no alterar el determinante dividimos por x^2, reduciendo el determinante al ejercicio anterior; cuyo orden es $n+1$.

$$|A| = \frac{1}{x^2}\begin{vmatrix} 0 & x & x & \cdots & x \\ x & 0 & x & \cdots & x \\ x & x & 0 & \cdots & x \\ \vdots & & & & \vdots \\ x & x & x & \vdots & 0 \end{vmatrix}_{n+1} = \frac{1}{x^2}nx(-x)^n = n(-1)^n x^{n-1}$$

Nota

Antes de calcular un determinante se debe precisar primero el orden de la matriz, puesto que el resultado depende del orden como se puede observar en los ejercicios (1.15) y (1.16).

Ejercicio 1.17

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 \\ a^2 & (b+c)^2-a^2 & 0 \\ b^2 & 0 & (c+a)^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_2 \text{ y } c_3]{\text{factor común}} (c+a+b)^2 \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c-a-b & c-a-b \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1-\sum f_i} (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2ab & -2b & -2a \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(bc)c_3]{\substack{ac_1 \\ (ac)c_2}} \frac{(a+b+c)^2}{c(ac)(bc)} \begin{vmatrix} 2abc & -2abc & -2abc \\ a^2c & (b+c-a)ac & 0 \\ b^2c & 0 & (c+a-b)bc \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2, f_3]{\text{factor común}} \frac{(a+b+c)^2(2abc)}{c(ac)(bc)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ a^2c & (b+c-a)ac & 0 \\ b^2c & 0 & (c+a-b)bc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2(2abc)}{c} \begin{vmatrix} \textcircled{1} & -1 & -1 \\ a & b+c-a & 0 \\ b & 0 & c+a-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-bf_1]{f_2-af_1} (a+b+c)^2(2ab) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & b+c & a \\ 0 & b & c+a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} (a+b+c)^2(2ab) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & b+c & a \\ 0 & -c & c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} -(2ab)(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -c & c \\ 0 & b+c & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{factor común } f_2]{f_3-(b+c)f_2} (2abc)(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & b+c & a \end{vmatrix}$$

$$= 2abc(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

Ejercicio 1.18

Sea

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & r & 0 & \cdots & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r & \cdots & r^2 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & r^2 & \cdots & r & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & \cdots & 0 & r & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

donde $r \in \mathbb{R}$ y A es una matriz de orden n. Calcular $|A|$ si

a) n es par

b) n es impar

Nota

Los elementos de la diagonal principal son iguales.

Solución.

a) Cuando n es par:

$$\text{Si } n = 4 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & r & r^2 & 0 \\ 0 & r^2 & r & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & r \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{cada fila}]{\text{factor común}} r^4 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & r & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4-rf_1]{f_3-rf_2} r^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1-r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-r^2 \end{vmatrix}$$

$$= r^4(1-r^2)^2$$

$$\text{Si } n=6 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & r & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & r & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 & r & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{cada fila}]{\text{factor común}} r^6 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{f_5-rf_2 \\ f_6-rf_1}]{f_4-rf_3} r^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-r^2 \end{vmatrix}$$

$$= r^6(1-r^2)^3$$

Al inducir el resultado para una matriz de orden n par se tiene:

$$\text{Si } n \text{ es par} \Longrightarrow |A| = r^n(1-r^2)^{n/2}$$

b) Cuando n es impar:

$$\text{Si } n = 5 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & r & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & r & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{cada fila}]{\text{factor común}} r^5 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_5 - rf_1]{f_4 - rf_2} r^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-r^2 \end{vmatrix}$$

$$= r^5(1-r^2)^2$$

$$\text{Si } n = 7 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{cada fila}]{\text{factor común}} r^7 \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0&r\\ 0&1&0&0&0&r&0\\ 0&0&1&0&r&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&r&0&1&0&0\\ 0&r&0&0&0&1&0\\ r&0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_7-rf_1]{\substack{f_5-rf_3\\ f_6-rf_2}} r^7 \begin{vmatrix} 1&0&0&0&0&0&r\\ 0&1&0&0&0&r&0\\ 0&0&1&0&r&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1-r^2&0&0\\ 0&0&0&0&0&1-r^2&0\\ 0&0&0&0&0&0&1-r^2 \end{vmatrix}$$

$$= r^7(1-r^2)^3$$

Al inducir el resultado para una matriz de orden n impar se tiene:

$$\text{Si } n \text{ es impar} \implies |A| = r^n(1-r^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

Ejercicio 1.19

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & x & x & x\\ x & a_2 & x & x & x & x\\ x & x & a_3 & x & x & x\\ x & x & x & a_4 & x & x\\ x & x & x & x & a_5 & x\\ x & x & x & x & x & a_6 \end{vmatrix}$$

donde $a_i \neq 0, i = 1,2,\cdots,6,\ x \neq 0,\ x - a_i \neq 0,\ \forall i$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} a_1 & x\\ x & a_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1-f_2} \begin{vmatrix} a_1 - x & x - a_2\\ x & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-(\frac{x}{a_1-x})f_2} \begin{vmatrix} a_1-x & x-a_2 \\ 0 & a_2-(\frac{x}{a_1-x})(x-a_2) \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-x)\left[a_2 - x(x-a_2)\frac{1}{a_1-x}\right]$$

$$= (a_1-x)a_2 - x(x-a_2)$$

$$= (a_1-x)a_2 + x(a_2-x)$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\left[\frac{a_2}{a_2-x} + \frac{x}{a_1-x}\right]$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \\ x & a_2 & x \\ x & x & a_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_2-f_3]{f_1-f_3} \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & x-a_3 \\ 0 & a_2-x & x-a_3 \\ x & x & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-(\frac{x}{a_1-x})f_1} \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & x-a_3 \\ 0 & a_2-x & x-a_3 \\ 0 & x & a_3-(\frac{x}{a_1-x})(x-a_3) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-(\frac{x}{a_2-x})f_2} \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & x-a_3 \\ 0 & a_2-x & x-a_3 \\ 0 & 0 & a_3-(\frac{x}{a_1-x})(x-a_3)-(\frac{x}{a_2-x})(x-a_3) \end{vmatrix}$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)\left[a_3 + \frac{x(a_3-x)}{a_1-x} + \frac{x(a_3-x)}{a_2-x}\right]$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\left[\frac{a_3}{a_3-x} + \frac{x}{a_1-x} + \frac{x}{a_2-x}\right]$$

$$= (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)\left[\frac{a_3}{a_3-x} + \frac{x}{a_2-x} + \frac{x}{a_1-x}\right]$$

Induciendo para $n = 6$

$$|A| = (a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)(a_4-x)(a_5-x)(a_6-x)$$
$$\left[\frac{a_6}{a_6-x} + \frac{x}{a_5-x} + \frac{x}{a_4-x} + \frac{x}{a_3-x} + \frac{x}{a_2-x} + \frac{x}{a_1-x}\right]$$

CamScanner

Nota

Hasta ahora, para calcular determinantes hemos utilizado las 8 propiedades dadas. Sin embargo, otro tipo de determinantes necesitarán de la siguiente propiedad.

Propiedad 9

Si cada elemento de una fila (o columna) de una matriz A se expresa como la suma de k-términos, entonces $|A|$ puede expresarse como la suma de los determinantes de k-matrices.

Ejemplo 1.39

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1+c_1+d_1 & b_2+c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}$$

Se observa que los dos elementos de la 2ª fila de A es la suma de 3 términos, entonces el $|A|$ es la suma de los determinantes de 3 matrices.

Ejemplo 1.40

$$\begin{vmatrix} u_1+v_1 & w_1 \\ u_2+v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

Observamos que los dos elementos de la 1ª columna de A es la suma de 2 términos, entonces $|A|$ es la suma de 2 matrices.

Ejercicio 1.20

Demostrar sin desarrollar que:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & x+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Solución.

En efecto, utilizaremos la Propiedad 9 para las filas de la matriz

CamScanner

Aplicamos la propiedad 9 a la 1ª fila:

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y & x+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix}$$

Aplicamos la propiedad 9 a la 2ª fila de ambas matrices:

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix}$$

Aplicamos la propiedad 9 a la 3ª fila de las cuatro matrices:

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.21

Demostrar sin desarrollar que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2y \\ 1 & y & xy^2 \\ 1 & z & xz^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2z \\ 1 & y & y^2z \\ 1 & z & yz^2 \end{vmatrix} = 0$$

En efecto, utilizando la Propiedad 9, para la 3ª columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & x & x^2(y+z) \\ 1 & y & y^2(x+z) \\ 1 & z & z^2(x+y) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2(y+z) \\ 0 & y-x & xy(y-x)+z(y^2-x^2) \\ 0 & z-x & xz(z-x)+y(z^2-x^2) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \text{ y } f_3]{\text{factor común}} (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & x & x^2(y+z) \\ 0 & 1 & xy+yz+zx \\ 0 & 1 & xy+yz+zx \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 1.22

Demostrar que si $abc \neq 0$. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a^3 \\ 1-b & b & b^3 \\ 1-c & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c & -a & bc \\ -a-c & b & -ac \\ a+b & -c & ab \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} b+c & -a & bc \\ -a-c & b & -ac \\ a+b & -c & ab \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} b+c+a & -a & bc \\ -a-c-b & b & -ac \\ a+b+c & -c & ab \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1]{\text{factor común}} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & -a & bc \\ -1 & b & -ac \\ 1 & -c & ab \end{vmatrix} \xrightarrow[(-1)c_2]{(-1)f_2} (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{af_1, bf_2, cf_3} \frac{(a+b+c)}{abc} \begin{vmatrix} a & a^2 & abc \\ b & b^2 & abc \\ c & c^2 & abc \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3]{\text{factor común}} (a+b+c) \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 \text{ a } c_1]{\text{trasladar}} (a+b+c)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2(a+b+c) \\ 1 & b & b^2(a+b+c) \\ 1 & c & c^2(a+b+c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3+a^2(b+c) \\ 1 & b & b^3+b^2(a+c) \\ 1 & c & c^3+c^2(a+b) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2(b+c) \\ 1 & b & b^2(a+c) \\ 1 & c & c^2(a+b) \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{anterior}]{\text{ejercicio}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} + 0 \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{vmatrix} 1-a & a & a^3 \\ 1-b & b & b^3 \\ 1-c & c & c^3 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.23

Si $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$. Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 0 \end{vmatrix}$$

Solución.

Para utilizar la Propiedad 9, de la Sección 1.2.1, la 1ª fila de la matriz expresamos como la suma de 2 términos

$$\begin{vmatrix} 1+0 & 0+\cos a & 0+\cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 1 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[\text{prop.9 en } f_2]{c_3-(\cos c)c_2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & 1 & 0 \\ \cos b & \cos c & 1-\cos^2 c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ 0+\cos a & 1+0 & 0+\cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix} =$$

CamScanner

$$(1-\cos^2 c)+\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\xrightarrow[\text{prop. 9 en } f_3]{c_1-(\cos b)c_3}(1-\cos^2 c)+\begin{vmatrix} -\cos^2 b & \cos a & \cos b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos c & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ 0+\cos b & 0+\cos c & 1+0 \end{vmatrix}=$$

$$\xrightarrow{f_3-(\cos c)f_2}(1-\cos^2 c)+\begin{vmatrix} -\cos^2 b & \cos a & \cos b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(1-\cos^2 c)-\cos^2 b-\cos^2 a+\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & \cos a & \cos b \\ \cos a & 0 & \cos c \\ \cos b & \cos c & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.24

Calcular el siguiente determinante de orden n

$$|A|=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\text{Si } n=2 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1+0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_1]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab \\ 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{común } f_1]{\text{factor}} a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-f_1} a\begin{vmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{vmatrix} + b(a+b)$$

$$= a^2+ab+b^2 = \frac{a^3-b^3}{a-b}$$

$$\text{Si } n=3 \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1+0 & a+b & ab \\ 0+0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_1]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} a & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & ab & 0 \\ 0 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{común } f_1]{\text{factor}} a\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-f_1} a\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & a & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a+0 & 0 \\ 0 & a+b & ab \\ 0 & 1+0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{prop. 9 en } c_2]{\text{factor común } f_2} a^2\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & ab \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{factor común } f_2]{f_3-f_2} a^2\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + ba\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} + b^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a+b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} a^3 + ba \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b^2(a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = \frac{a^4 - b^4}{a - b}$$

Al inducir el resultado para la matriz de orden n se tiene

$$|A| = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$$

Ejercicio 1.25

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 21 & 23 & 25 \\ 8+a & 9+b & 3+c & 0+d \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{pmatrix}$$

donde a, b, c y d son divisibles por 19 y los números 8 246, 8 930, 9 728 y 9 804 son también divisibles por 19. Demostrar que $|A|$ es divisible por 19.

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 27 & 21 & 23 & 25 \\ 8+a & 9+b & 3+c & 0+d \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8+19 & 2+19 & 4+19 & 6+19 \\ 8+a & 9+b & 3+c & 0+d \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 8+a & 9+b & 3+c & 0+d \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 19 & 19 & 19 & 19 \\ 8+a & 9+b & 3+c & 0+d \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

$$\xrightarrow[f_2]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 0 \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ a & b & c & d \\ 9+a^2 & 7+b^2 & 2+c^2 & 8+d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} \quad (1.13)$$

$$\xrightarrow[f_3]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 3 & 0 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 9+a^3 & 8+b^3 & 0+c^3 & 4+d^3 \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

$$\xrightarrow[f_4]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ 9 & 8 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 2 & 8 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \quad (1.15)$$

Nota

En (1.12), (1.13), (1.14) y (1.15) los segundos determinantes son divisibles por 19, entonces solo queda demostrar en (1.15) que el primer determinante es divisible por 19

En efecto:

$$\xrightarrow[100c_2+1000c_1]{c_4+10c_3+} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 6+4(10)+2(100)+8(1000) \\ 8 & 9 & 3 & 0+3(10)+9(100)+8(1000) \\ 9 & 7 & 2 & 8+2(10)+7(100)+9(1000) \\ 9 & 8 & 0 & 4+0(10)+8(100)+9(1000) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 8 & 2 & 4 & 8246 \\ 8 & 9 & 3 & 8930 \\ 9 & 7 & 2 & 9728 \\ 9 & 8 & 0 & 9804 \end{vmatrix} \text{ divisible por } 19$$

CamScanner

Ejercicio 1.26

Demostrar usando propiedades que

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - b^4$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1 + \sum f_i} \begin{vmatrix} a+b & a+b & a+b & a+b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1]{\text{factor común}} (a+b) \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 - bf_1} (a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & -b & -b & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } f_4]{\text{Prop. 9}} (a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0+0 & 0-b & 0-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + (a+b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & -b & -b & -b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4]{\text{factor común}} (a+b)a^3 + (a+b)(-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.16}$$

Tomando solo la matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-af_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-a & -a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } f_3]{\text{Prop. 9}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0+0 & 0+0 & b-a & 0-a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3]{\text{factor común}} b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4-af_3} b\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} + (-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$= b^2 + (-a)(b-a) \tag{1.17}$$

Reemplazando (1.17) en (1.16)

$$\begin{aligned}|A| &= (a+b)a^3 + (a+b)(-b)[b^2 - a(b-a)] \\ &= (a+b)[a^3 - b^3 + ab(b-a)] \\ &= (a+b)(a-b)[a^2 + ab + b^2 - ab] \\ &= (a^2-b^2)(a^2+b^2) \\ &= a^4 - b^4\end{aligned}$$

1.2.3 Cálculo del determinante por cofactores

El desarrollo de un determinante por cofactores fue empleado por primera vez por Laplace[2].

El valor del determinante de una matriz $A = (a_{ij})$ de orden 3 ha sido definido en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\end{aligned}$$



Estos tres determinantes de orden $n-1$ se obtienen del determinante original eliminando ciertas filas y ciertas columnas.

Por ejemplo, el primer determinante de orden 2 se obtuvo al eliminar todos los elementos de la primera fila y primera columna de $|A|$.

[2]Pierre de Laplace, matemático francés (1749–1827)

Esta forma de expresar el valor del determinante de una matriz de orden 3, se puede generalizar para determinantes de matrices de mayor orden. En efecto:

Definición 1.27

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n, se llama **menor del elemento** a_{ij} y se denota por M_{ij} al determinante de la matriz cuadrada de orden $(n-1)$ que resulta de suprimir en A todos los elementos de la fila i y todos los elementos de la columna j.

Definición 1.28

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, se llama **cofactor del elemento** a_{ij} y se denota por A_{ij} al menor M_{ij} afectado de su signo. Es decir

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo 1.41

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

El menor del elemento a_{12} es: $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8$

El cofactor del elemento a_{12} es: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-8) = 8$

Nota

1) La diferencia entre el menor M_{ij} y el cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} es el signo. Es decir:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} = \pm M_{ij}$$

2) El signo de los cofactores se muestra en el siguiente arreglo:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdot & \cdot \\ - & + & - & \cdot & \cdot \\ + & - & + & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Observamos que los signos $+$ y $-$ se alternan de acuerdo al lugar que ocupa a_{ij}.

Definición 1.29

El **valor del determinante** de una matriz cuadrada A de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de cualquier fila o columna por sus respectivos cofactores. Es decir:

1) Si se toma la fila i

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + \cdots a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \end{aligned}$$

2) Si se toma la columna j

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + \cdots a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \end{aligned}$$

Usando esta definición, calcularemos el determinante de la matriz dada en el ejemplo anterior.

Si se elige la fila 1:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{1.18}$$

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 20 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-8) = 8$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Reemplazando en (1.18)

$$|A| = 3(20) + (-1)(8) + 2(7) = 66$$

Si se elige la columna 3

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

pero $a_{23} = 0$ entonces

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}A_{13} + a_{33}A_{33} \\ &= 2(7) + (-4)(-13) = 14 + 52 = 66 \end{aligned}$$

Nota

1) En cualquier caso se debe obtener el mismo resultado.

2) Para calcular el determinante de una matriz por cofactores es preferible elegir aquellas filas o columnas que contengan mayor cantidad de ceros.

Ejemplo 1.42

Calcular el siguiente determinante de orden n

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_n$$

Si elegimos la columna 1:

$$|A| = (-1)^{1+1} a A_{11} + (-1)^{n+1} b A_{n1}$$

$$= a \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$|A| = aa^{n-1} + (-1)^{n+1} bb^{n-1} = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

Nota

1) Si $n = 4 \Longrightarrow |A| = a^4 - b^4$ resultado que hemos obtenido en el Ejercicio 1.26 cuyo procedimiento fue más laborioso porque se trabajó con la teoría disponible hasta ese momento.

2) Ahora contamos con la teoría completa para calcular cualquier determinante.

Ejemplo 1.43

Demostrar que si A es una matriz triangular (superior o inferior) el valor del determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal (Propiedad 8).

En efecto,

Sea A una matriz cuadrada de orden n, triangular superior, entonces: desarrollamos el determinante usando los cofactores de la 1ª columna en forma sucesiva

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1}$$

CamScanner

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

Propiedades

1) Si $D = \text{diag}(d_{11}d_{22}\cdots d_{nn})$ entonces $|D| = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}$

2) $|I| = 1$, I matriz identidad

3) $|A+B| \neq |A| + |B|$

4) $|AB| = |A||B| = |BA|$ si A y B son matrices cuadradas

5) $|kA| = k^n|A|$, si $k \in \mathbb{R}$ y A es una matriz de orden n.

6) $|A| = |A^T|$

Ejemplo 1.44

El orden de la matriz es implícito: orden n.

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\ldots,\ f_n+f_1]{f_2+f_1,\ f_3+f_1,} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

CamScanner

Ejemplo 1.45

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & & & & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ldots,\, f_n-f_1]{f_2-f_1,\, f_3-f_1,} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+1-n \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))$$

Ejemplo 1.46

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-1 & n & n & \cdots & n & n & n \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-f_2,\, f_2-f_1]{f_n-f_{n-1},\cdots} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Trasladamos f_n a f_1, en la matriz resultante trasladamos f_n a $f_2, \ldots$ y así sucesivamente

$$= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}(-1)^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1)^{n-(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$= n(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\cdots(-1) = n(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

Ejemplo 1.47

Calcular el siguiente determinante usando propiedades.

Observamos que la matriz tiene orden $n+1$

$$\begin{vmatrix} 0 & x & x & x & \cdots & x \\ 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a^n \end{vmatrix}_{n+1} \xrightarrow[\text{en } f_1]{Prop.9} \begin{vmatrix} x-x & x+0 & x+0 & x+0 & \cdots & x+0 \\ 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a^n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & x & x & x & \cdots & x \\ 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a^n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1]{\text{factor común}} x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & a^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a^n \end{vmatrix} + (-x)aa^2a^3\cdots a^n$$

$$\xrightarrow[\ldots, f_n - nf_1]{f_2 - f_1,\ f_3 - 2f_1,} x \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & a^2-2 & -2 & \cdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-3 & \cdots & -3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a^n - n \end{vmatrix} + (-x)a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= x(a-1)(a^2-2)\cdots(a^n-n) - xa^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= x\left[(a-1)(a^2-2)\cdots(a^n-n) - a^{\frac{n(n+1)}{2}}\right]$$

1.2.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.27

Calcular el siguiente determinante de orden n

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2 - \frac{1}{2}f_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{2f_2} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_3 - \frac{1}{3}f_2} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{3f_3} \frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente se obtiene

$$= \cdots = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & n & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

Ejercicio 1.28

Calcular el siguiente determinante de orden n, donde $x \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{2}{x} & -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & \frac{2}{x} & \frac{-1}{x^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{2}{x} & \frac{-1}{x^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \frac{2}{x} \end{vmatrix}$$

Solución.

Factor común $\frac{1}{x}$ en cada fila

$$|A| = \left(\frac{1}{x}\right)^n \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x & 2 & -\frac{1}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & -\frac{1}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2+\frac{x}{2}f_1} \frac{1}{x^n}\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & -\frac{1}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}\text{ en } f_2]{\text{factor común}} \frac{1}{x^n}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & -\frac{1}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+\frac{x}{3}f_2} \frac{1}{x^n}\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\text{ en } f_3]{\text{factor común}} \frac{1}{x^n}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{3}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \frac{1}{x^n}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{x} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{2}{x} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -\frac{-3}{x} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x^n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}\right)(n+1)! = \frac{1}{x^n}(n+1)$$

Ejercicio 1.29

Demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & & & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(x+a)^n + (x-a)^n]$$

Solución.

En efecto: Vamos a demostrar que la igualdad se verifica para una matriz cuadrada de orden 2, de orden 3 y luego inducimos el resultado para una matriz de orden n.

Para $n = 2$

$$\begin{vmatrix} x & a \\ -a & x \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1 - f_2} \begin{vmatrix} x+a & a-x \\ -a & x \end{vmatrix} \xrightarrow{2f_2} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+a & a-x \\ -2a & 2x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 + f_1} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+a & a-x \\ x-a & x+a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[(x+a)^2 + (x-a)^2]$$

Para $n = 3$

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{vmatrix} \xrightarrow[f_2 - f_3]{f_1 - f_2} \begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 \\ 0 & x+a & a-x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{2f_3} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 \\ 0 & x+a & a-x \\ -2a & -2a & 2x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + f_2} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 \\ 0 & x+a & a-x \\ -2a & x-a & x+a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 + f_1} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 \\ 0 & x+a & a-x \\ x-a & 0 & x+a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1]{\text{cofactores}} \frac{1}{2}\left[(x+a)^3 + (x-a)^3\right]$$

Luego,

$$|A| = \frac{1}{2}\left[(x+a)^n + (x-a)^n\right]$$

Ejercicio 1.30

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2x & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n-2 \\ 3x & 3x & 3 & 6 & \cdots & 3n-6 \\ 4x & 4x & 4x & 4 & \cdots & 4n-12 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ nx & nx & nx & nx & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2x & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n-2 \\ 3x & 3x & 3 & 6 & \cdots & 3n-6 \\ 4x & 4x & 4x & 4 & \cdots & 4n-12 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ nx & nx & nx & nx & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2, f_3, \ldots, f_n]{\text{factor común}} (2\cdot 3\cdot 4\cdots n) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ x & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix} = n!|B| \qquad (1.19)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ x & x & x & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ x & x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3-c_2,\ c_2-c_1]{c_n-c_{n-1},\dots,c_4-c_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ x & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{en } c_1]{\text{Prop. 9}}\begin{vmatrix} x+(1-x) & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ x+0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x+0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ x & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1]{\text{factor común}} x\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x \end{vmatrix} + (1-x)^n$$

$$\xrightarrow[\dots,\, f_n - f_1]{f_2-f_1,\, f_3-f_1,\, f_4-f_1,} x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -x \end{vmatrix} + (1-x)^n$$

$$\xrightarrow{\text{cofactor } c_1} x \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & -x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -x \end{vmatrix}_{n-1} + (1-x)^n$$

$$= x(-x)^{n-1} + (1-x)^n = (-1)^{n-1}x^n + (1-x)^n$$
$$= (-1)^{n-1}x^n + (-1)^n(x-1)^n = (-1)^n\left[(x-1)^n - x^n\right]$$

Reemplazando en (1.19):

$$|A| = n!|B| = (-1)^n n!\left[(x-1)^n - x^n\right]$$

Ejercicio 1.31

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 + x_1 & a_2 + 0 & a_3 + 0 & \cdots & a_{n-1} + 0 & a_n + 0 \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_1]{\text{prop. 9}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix} + (x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)$$

Desarrollamos el determinante por cofactores de la 1ª fila

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

CamScanner

$$+(-1)^{1+2}a_2\begin{vmatrix} -x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+3}a_3\begin{vmatrix} -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+(n-1)}a_{n-1}\begin{vmatrix} -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} -x_1 & x_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & x_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^2a_1(x_2x_3x_4\cdots x_{n-1}x_n) + (-1)^3(-1)a_2(x_1x_3x_4\cdots x_{n-1}x_n) \\ &\quad + (-1)^4(-1)^2a_3(x_1x_2x_4\cdots x_{n-1}x_n) \\ &\quad + \cdots + (-1)^n(-1)^{n-2}a_{n-1}(x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n) \\ &\quad + (-1)^{1+n}(-1)^{n-1}a_n(x_1x_2\cdots x_{n-2}x_{n-1}) + (x_1x_2\cdots x_n) \end{aligned}$$

$$|A| = a_1(x_2x_3\cdots x_n) + a_2(x_1x_3\cdots x_n) + a_3(x_1x_2x_4\cdots x_n) + \cdots$$

$$+a_{n-1}(x_1x_2\cdots x_{n-2}x_n)+a_n(x_1x_2\cdots x_{n-1})+(x_1x_2\cdots x_n)$$

$$|A|=(x_1x_2x_3\cdots x_n)\left(\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}+1\right)$$

Ejercicio 1.32

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0\cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0\cdots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

Solución.

Esta matriz tiene orden $n+1$

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 \\ a_1 & -b_0 & b_2 & 0\cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & -b_1 & b_3\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0\cdots & -b_{n-2} & b_n \\ a_n & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ldots,\, b_nf_n]{b_0f_1,\, b_1f_2,\, b_2f_3,}$$

$$\frac{1}{b_0}\cdots\frac{1}{b_n}\begin{vmatrix} a_0b_0 & b_0b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1b_1 & -b_0b_1 & b_1b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2b_2 & 0 & -b_1b_2 & b_2b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n-1}b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-1}b_{n-2} & b_{n-1}b_n \\ a_nb_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1}b_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1+\sum f_i}$$

$$\begin{vmatrix} a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1b_1 & -b_0b_1 & b_1b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2b_2 & 0 & -b_1b_2 & b_2b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n-1}b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-1}b_{n-2} & b_{n-1}b_n \\ a_nb_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1}b_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xrightarrow[f_1]{\text{cofactor}}$$

$$\frac{(a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n)}{b_0b_1\cdots b_n}\begin{vmatrix} -b_0b_1 & b_1b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_1b_2 & b_2b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-1}b_{n-2} & b_{n-1}b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1}b_n \end{vmatrix}_n$$

$$\xrightarrow[b_i \text{ en } f_i]{\text{factor común}} \frac{(a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n)}{b_0}\begin{vmatrix} -b_0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_1 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-2} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_{n-1} \end{vmatrix}_n$$

$$= (-1)^n(a_0b_0+a_1b_1+\cdots+a_nb_n)(b_1b_2\cdots b_{n-1})$$

Ejercicio 1.33

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución.

La matriz tiene orden n

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[x^2c_{n-2},xc_{n-1}]{x^{n-1}c_1,\, x^{n-2}c_2,\dots} \frac{1}{x^{n-1}x^{n-2}\dots x^2x}|B|$$

$$|B| = \begin{vmatrix} nx^{n-1} & (n-1)x^{n-2} & (n-2)x^{n-3} & \cdots & 3x^2 & 2x & 1 \\ -x^{n-1} & x^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^{n-2} & x^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1+\sum c_i} \frac{1}{x^{n-1}x^{n-2}\dots x^2x}$$

$$\begin{vmatrix} P & (n-1)x^{n-2} & (n-2)x^{n-3} & \cdots & 3x^2 & 2x & 1 \\ 0 & x^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^{n-2} & x^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & x \end{vmatrix}_n$$

donde $P = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 3x^2 + 2x + 1$

$$\xrightarrow{\text{cofactores } c_1}$$

$$\frac{P}{x^{n-1}x^{n-2}\dots x^2x} \begin{vmatrix} x^{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -x^{n-2} & x^{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xrightarrow[\text{c/fila}]{\text{factor común}} (nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 3x^2 + 2x + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 3x^2 + 2x + 1$$

Ejercicio 1.34

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 6!a_0 & 5!a_1 & 4!a_2 & 3!a_3 & 2!a_4 & a_5 & a_6 \\ -6 & x+5 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & x+4 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & x+3 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x+2 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & x+1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6!a_0 & 5!a_1 & 4!a_2 & 3!a_3 & 2!a_4 & a_5 & a_6 \\ -6 & x+5 & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & x+4 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & x+3 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x+2 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & x+1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_5+\sum f_i,\ f_6+f_5]{f_2+\sum f_i,\ f_3+\sum f_i,\ f_4+\sum f_i,}$$

$$\begin{vmatrix} 6!a_0 & 5!a_1 & 4!a_2 & 3!a_3 & 2!a_4 & a_5 & a_6 \\ -6 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[(6\cdot5\cdot4\cdot3)c_5,\ 6!c_6,\ 6!c_7]{6c_2,\ (6\cdot5)c_3,\ (6\cdot5\cdot4)c_4,}$$

$$\frac{1}{6(6\cdot5)\cdots 6!6!}\begin{vmatrix} 6!a_0 & 6!a_1 & 6!a_2 & 6!a_3 & 6!a_4 & 6!a_5 & 6!a_6 \\ -6 & 6x & -x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6\cdot5 & 6\cdot5x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6\cdot5\cdot4 & 6\cdot5\cdot4x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6\cdot5\cdot4\cdot3 & 6\cdot5\cdot4\cdot3x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6! & 6!x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6! & 6!x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{c/ fila}]{\text{factor común}} 6!\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

se reduce al ejercicio anterior $|A| = 6!|B|$

$$|B| = (a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_5x + a_6)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_6$$

$$|A| = 6!(a_0x^6 + a_1x^5 + \cdots + a_5x + a_6)$$

Ejercicio 1.35

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} n!a_0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ (n-1)!a_1 & x & -(n-1) & \cdots & 0 \\ (n-2)!a_2 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

Solución.

La matriz tiene orden $n+1$

$$|A^T| \xrightarrow[(3.4\ldots n)c_{n-1},\ n!c_n,\ n!c_{n+1}]{nc_2,\ n(n-1)c_3,\ldots}$$

$$\begin{vmatrix} n!a_0 & (n-1)!a_1 & (n-2)!a_2 & \cdots & 2!a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -n & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{nn(n-1)\cdots n!n!} \begin{vmatrix} n!a_0 & n!a_1 & n!a_2 & \cdots & n!a_{n-1} & n!a_n \\ -n & nx & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n(n-1) & n(n-1)x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n!x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n! & n!x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{c/fila}]{\text{factor común}} n! \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$|A^T| = n!(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n) = |A|$$

Ejercicio 1.36

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots & 2(n-1)+1 & 2n+1 & n+1 \\ x-1 & x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x-1 & x \end{vmatrix}$$

Solución.

La matriz tiene orden $n+1$

$$|A| \xrightarrow{c_n - c_{n+1}} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots & 2(n-1)+1 & n & n+1 \\ x-1 & x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 - c_4,\ c_2 - c_3,\ c_1 - c_2]{c_{n-1} - c_n, \ldots, c_4 - c_5}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n & n+1 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{n+1}$$

Este determinante se reduce al caso anterior. Entonces:

$$|A| = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + (n-1)x^2 + nx + (n+1)$$

Ejercicio 1.37

Demostrar sin desarrollar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = x^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución.

Si $x \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{xf_2,\, xf_4} \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & 0 \\ 0 & x & 2x^2 & x^3 \\ 1 & x & x^2 & 0 \\ 0 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{xc_1,\, xc_2} \frac{1}{x^4} \begin{vmatrix} x & 2x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & 2x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^2 & 0 \\ 0 & x^2 & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c/columna]{\text{factor común en}} \frac{xx^2x^2x^3}{x^4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x^4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.38

Demostrar sin desarrollar que:

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^4 & b^4 \\ 1 & c^4 & 0 & a^4 \\ 1 & b^4 & a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & c^2 & 0 & a^2 \\ c^2 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[(a^2b^2)c_4]{(b^2c^2)c_2,\ (a^2c^2)c_3,} \frac{1}{(b^2c^2)(a^2c^2)(a^2b^2)}\begin{vmatrix} 0 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 & a^2b^2c^2 \\ a^2 & 0 & a^2c^4 & a^2b^4 \\ b^2 & b^2c^4 & 0 & a^4b^2 \\ c^2 & b^4c^2 & a^4c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{cada fila}]{\text{factor común en}} \frac{(a^2b^2c^2)a^2b^2c^2}{(b^2c^2)(a^2c^2)(a^2b^2)}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^4 & b^4 \\ 1 & c^4 & 0 & a^4 \\ 1 & b^4 & a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^4 & b^4 \\ 1 & c^4 & 0 & a^4 \\ 1 & b^4 & a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.39

Demostrar sin desarrollar que:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[(ab)c_4]{(bc)c_2,\ (ac)c_3,} \frac{1}{(bc)(ac)(ab)} \begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ a & 0 & ac^2 & ab^2 \\ b & bc^2 & 0 & a^2b \\ c & b^2c & a^2c & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c/fila]{\text{factor común en}} \frac{(abc)abc}{(bc)(ac)(ab)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.40

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

Solución.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+\sum c_i} \begin{vmatrix} a+b+c+d & b & c & d \\ a+b+c+d & a & d & c \\ a+b+c+d & d & a & b \\ a+b+c+d & c & a & b \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{factor común } c_1} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & d & c \\ 1 & d & a & b \\ 1 & c & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4-f_1]{f_2-f_1,\ f_3-f_1} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} ① & b & c & d \\ 0 & a-b & d-c & c-d \\ 0 & d-b & a-c & b-d \\ 0 & c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{de } c_1]{\text{cofactores}} (a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-b & d-c & c-d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1-f_2-f_3}$$

$$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a-d-c+b & d-a-b+c & c-b-a+d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{factor común } f_1}$$

$$(a+b+c+d)\begin{vmatrix} a+b-c-d & -a-b+c+d & -a-b+c+d \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3+c_1]{c_2+c_1} (a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} ① & -1 & -1 \\ d-b & a-c & b-d \\ c-b & b-c & a-d \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d-b & a-c+d-b & 0 \\ c-b & 0 & a-d+c-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b-c+d)(a-b+c-d)$$

Ejercicio 1.41

Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

Solución.

Se sabe que $|A||A^T| = |A|^2$

$$|A||A^T| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$$|A|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4 \Longrightarrow |A| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

1.2.5 Ejercicios propuestos

1) Demostrar que:

$$\begin{vmatrix} na+x & nb+y & nc+z \\ nx+u & ny+v & nz+w \\ nu+a & nv+b & nw+c \end{vmatrix} = (n^3+1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

2) Demostrar sin desarrollar que:

$$\begin{vmatrix} x & a & b(1+c)+c \\ x & b & a(1+c)+c \\ x & c & b(1+a)+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

3) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = (z-1)$

4) Demostrar que si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & \forall i \neq j \\ 1-n; & i = j \end{cases} \quad \text{entonces} \quad |A| = 0$$

5) Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n donde

$$a_{ij} = \begin{cases} x+\lambda; & i = j \\ x; & \forall i \neq j \end{cases}$$

Calcular el determinante de A.

Rpta: $|A| = (nx+\lambda)\lambda^{n-1}$

6) Si A es una matriz cuadrada de orden n, demostrar que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 \end{vmatrix} = 2^{n+1} - 1$$

7) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} a \cos b & \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b & \cos a \\ -k \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b & k \operatorname{sen} a \cos b & 0 \\ k \cos a \cos b & k \cos a \operatorname{sen} b & -k \operatorname{sen} a \end{pmatrix}$$

si se sabe que $|kA| = x^5 \operatorname{sen} a$, determinar el valor de x ($k \in \mathbb{R}$).

Rpta: $x = -k$

8) Las longitudes de los lados de un triángulo son a, b y c respectivamente y α es el ángulo agudo opuesto al lado de longitud a, calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & b \operatorname{sen}\alpha & c \operatorname{sen}\alpha \\ b \operatorname{sen}\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$$

9) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \cdots & n-3 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & x & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = (-1)^{n-1} x^{n-2}$

10) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \\ 2n & 3n & 4n & \cdots & n \\ 3n & 4n & 5n & \cdots & 2n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n^2 & n & 2n & \cdots & (n-1)n \end{vmatrix}$$



11) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

12) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

13) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n+1)$

14) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \cdots & a_{n-1}x & a_n \\ a_0x & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2 & a_1x & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_0x^{n-1} & a_1x^{n-2} & a_2x^{n-3} & \cdots & b_{n-1} & 0 \\ a_0x^n & a_1x^{n-1} & a_2x^{n-2} & \cdots & a_{n-1}x & b_n \end{vmatrix}$$

15) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A|=0$

16) Demostrar sin desarrollar que

$$\begin{vmatrix} yz & y^2 & z^2 \\ x^2 & xz & z^2 \\ x^2 & y^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

17) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ -n & x-2 & 2 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -(n-1) & x-4 & 3 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = (x-n)^n$

18) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} c & -a & -a & -a \\ a & c & -a & -a \\ a & a & c & -a \\ a & a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ c & c & a & a \\ -a & -a & c & a \\ -a & -a & -a & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[(c+a)^4 + (c-a)^4\right]$$

19) Calcular el $|A|$ si n es par y

$$|A| = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$$

Rpta: $|A| = (x^2-1)(x^2-9)(x^2-25)\cdots(x^2-(n-1)^2)$ si $n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}^+$

20) Si A es una matriz cuadrada de orden n, demostrar que

$$|A| = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0\cdots 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1\cdots 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0\cdots 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

21) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \cdots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & x_2 & a_3b_2 & \cdots & a_nb_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & x_3 & \cdots & a_nb_3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & a_3b_n & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = \prod_{i=1}^{n}(x_i - a_ib_i)\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_ib_i}{x_i - a_ib_i}\right)$

22) Hallar el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x+y & y+z & nz & w+z \\ x-y & x-w & -nw & z-w \\ w-z & x+w & nx & x-y \\ -w-z & y-z & ny & x+y \end{pmatrix}$$

23) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \cdots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \cdots & x^2 \\ 1 & 3 & 3\cdot 2 & 3! & \cdots & x^3 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & n & n(n-1) & n(n-1)(n-2) & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = 1!2!3!\cdots(n-1)!(x-1)^n$

24) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 2+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 3+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & n+x_n \end{vmatrix}$$

25) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 6 \\ x-1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x-1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x-1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & x-1 & x \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$

26) Calcular el siguiente determinante, si $x_i \neq 0, \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{vmatrix} 1+a_0+x_1^2 & 1+a_1 & 1+a_2 & \cdots & 1+a_{n-2} & 1+a_{n-1} \\ -x_1^2 & x_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2^2 & x_3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1}^2 & x_n^2 \end{vmatrix}$$

27) Calcular el valor de k si:

$$\begin{vmatrix} a & x & x & -x & -x \\ x & 2a & a & 0 & 0 \\ x & a & 2a & 0 & 0 \\ -x & 0 & 0 & 2a & a \\ -x & 0 & 0 & a & 2a \end{vmatrix} = ka^3$$

Rpta: $k = 3(3a^2 - 4x^2)$

28) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 8 \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n & 0 & 0 & 0 \cdots & -2(n-1) & 2n+2 \\ n+1 & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & -2n \end{vmatrix}$$

29) Si $a, b \in \mathbb{R}$, ¿para qué valores de a y b la matriz A es no singular?

$$A = \begin{pmatrix} -a^n & a^{n-1} & 2a^{n-2} & 3a^{n-3} & \cdots & (n-1)a & n \\ -a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a^2 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & 2a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ -a^{n-1} & a^{n-2} & 2a^{n-3} & 3a^{n-4} & \cdots & b & 0 \\ -a^n & a^{n-1} & 2a^{n-2} & 3a^{n-3} & \cdots & (n-1)a & b \end{pmatrix}$$

Rpta: $|A| = (-a^n)(b-1)(b-2)\cdots(b-n)$

$|A| \neq 0 \Longrightarrow a \neq 0$ y $b \neq \{1, 2, \ldots, n\}$

30) Demostrar sin desarrollar que

$$\begin{vmatrix} 1+yz & yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & y & z \\ yz & yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x^2 & 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x & x^2 \\ y^2 & 1 & y & y^2 \\ z^2 & 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

31) Si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ y

$$|A| = \begin{vmatrix} bc & -ab & ac \\ -ab & ac & -bc \\ ac & -bc & ab \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -bc & a^2b & -a^2 \\ b & -ac & b \\ c^2 & c^2b & -ab \end{vmatrix} = 2k^2c^2(b^2 - kc)$$

Calcular la constante k.

Rpta: $k = a$

32) Calcular el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/n+1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1/n & 1/n+1 & 1/n+2 & \cdots & 1/2n-1 \end{vmatrix}$$

33) Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -b & -b & -b & \cdots & -b \\ 1 & na & -2b & -3b & \cdots & -(n-1)b \\ 1 & (n-1)a & a & -3b & \cdots & -(n-1)b \\ 1 & (n-2)a & a & a & \cdots & -(n-1)b \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 2a & a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$$

Rpta: $|A| = a(a+b)\cdots(a+(n-1)b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a+b}+\cdots+\dfrac{1}{a+(n-1)b}\right)$

34) Haciendo uso de las propiedades, sin desarrollar, calcular $|A|-|B|$ cuando

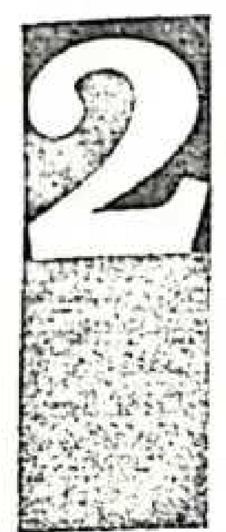
$$A = \begin{pmatrix} e^{i(\theta+\beta)} & e^{i2\alpha} & e^{i2\alpha} \\ e^{i2\theta} & e^{i(\alpha+\beta)} & e^{i2\theta} \\ e^{i2\beta} & e^{i2\beta} & e^{i(\alpha+\theta)} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e^{i(\theta+\beta)} & e^{i(\alpha+\theta)} & e^{i(\alpha+\beta)} \\ e^{i(\alpha+\theta)} & e^{i(\alpha+\beta)} & e^{i(\theta+\beta)} \\ e^{i(\alpha+\beta)} & e^{i(\theta+\beta)} & e^{i(\alpha+\theta)} \end{pmatrix}$$

35) Usando propiedades de los determinantes, calcular la constante k.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \\ 1 & y & y^2 & y^3 & y^4 \\ 1 & 2y & 3y^2 & 4y^2 & 5y^4 \end{vmatrix} = 2xy(y-x)k$$

Rpta: $k = x^2(y-x)^5$

Capítulo



RANGO E INVERSA DE UNA MATRIZ

2.1 Inversa de una matriz cuadrada

Uno de los conceptos más importantes en la teoría de matrices es la noción de inversa de una matriz cuadrada.

Definición 2.1

Una matriz cuadrada A de orden n es **invertible** si existe una matriz cuadrada B de orden n tal que

$$BA = I = AB$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

B se llama **matriz inversa** de A, generalmente se denota por $B = A^{-1}$

Nota

En general, una matriz cuadrada A no siempre tiene inversa



Ejemplo 2.1

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces AA^{-1} no puede ser igual a la matriz identidad I_2, puesto que: para cualesquiera números a, b, c y d

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.1

Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

Demostración. **(Por el método del absurdo)** Supongamos que A^{-1} y B son matrices inversas de A, tales que $A^{-1} \neq B$.

$$\text{Si } A^{-1} \text{ es inversa de } A \Longrightarrow A^{-1}A = I$$
$$\text{Si } B \text{ es inversa de } A \Longrightarrow BA = I$$

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= BA \\ (A^{-1}A)A^{-1} &= (BA)A^{-1} \\ A^{-1}(AA^{-1}) &= B(AA^{-1}) \\ A^{-1}I &= BI \Longrightarrow A^{-1} = B \end{aligned}$$

lo que contradice la hipótesis ◇



Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

encontrar la inversa de A, si es que existe.

En efecto, supongamos que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces:

Si A es invertible $AA^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 3a-2c & 3b-2d \\ 4a+c & 4b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a-2c=1 \\ 4a+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3b-2d=0 \\ 4b+d=1 \end{cases}$$

$$11a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{11} \qquad 11b = 2 \Longrightarrow b = \frac{2}{11}$$

$$c = -4a \Longrightarrow c = -\frac{4}{11} \qquad d = \frac{3}{2}b \Longrightarrow d = \frac{3}{11}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{3}{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.3

Encontrar la inversa de la matriz cuadrada general de orden 2, si existe.

Solución.

Si

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

tiene inversa, entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tal que $AA^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+wc & zb+wd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} xa+yc=1 \\ za+wc=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} xb+yd=0 \\ zb+wd=1 \end{cases}$$

Si $xw - yz \neq 0$, las soluciones de estos sistemas son:

$$a = \frac{w}{xw - yz}, \quad b = \frac{-y}{xw - yz}, \quad c = \frac{-z}{xw - yz}, \quad d = \frac{x}{xw - yz}$$

luego

$$A^{-1} = \frac{1}{xw - yz}\begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} \text{ siempre que } xw - yz \neq 0$$

Nota

La inversa de la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ existe si } |A| = \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = xw - yz \neq 0$$

Ejemplo 2.4

Usando el Ejemplo 2.3, encontrar si es que existe la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$|A| = 2(-6) - 8(1) = -20 \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.2

Una matriz cuadrada A tiene inversa si y solo si su determinante es diferente de cero.

Demostración. ($\Leftarrow$) Si $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ existe (obvio).

($\Rightarrow$) Si A^{-1} existe, entonces

$$AA^{-1} = I$$

$$|AA^{-1}| = |I| = 1$$

$$|A||A^{-1}| = 1$$
$$\Longrightarrow |A| \neq 0$$



Nota

Una consecuencia importante de este teorema es que:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1},$$

es decir $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

Definición 2.2

Una matriz cuadrada A con determinante diferente de cero se llama matriz no singular. Es decir si $|A| \neq 0$ entonces A es una matriz no singular.

Nota

Como consecuencia de esta definición, una matriz invertible es una matriz no singular.

La siguiente definición establece una fórmula para calcular la inversa de una matriz cuadrada invertible.

Definición 2.3

Si A es una matriz cuadrada no singular ($|A| \neq 0$) y (A_{ij}) es la matriz de cofactores, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^T$$

Definición

La matriz $(A_{ij})^T$ se llama **matriz adjunta** de A y se denota por adj(A). Es decir

$$\text{adj}(A) = (A_{ij})^T$$

Luego, en la Definición 2.3

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A)$$



Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

calcular A^{-1} si es que existe

Solución.
En efecto:

$$|A| = 8 \neq 0 \Longrightarrow A^{-1} \text{ existe}$$

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 8 & A_{12} = -3 & A_{13} = -1 \\ A_{21} = -16 & A_{22} = 11 & A_{23} = 1 \\ A_{31} = 40 & A_{32} = -27 & A_{33} = -1 \end{array}$$

Luego

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -16 & 40 \\ -3 & 11 & -27 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprobando

$$A^{-1}A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -16 & 40 \\ -3 & 11 & -27 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = I$$

2.1.1 Propiedades de la matriz inversa

1) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, si $k \neq 0$

2) $(A^{-1})^{-1} = A$, si A es invertible

3) $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$; $m \in \mathbb{Z}^+$

4) $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}) \Longrightarrow D^{-1} = \text{diag}(d_{11}^{-1}, d_{22}^{-1}, \ldots, d_{nn}^{-1})$

5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, si A y B son invertibles

6) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$, si A es no singular

7) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Demostración.

1)

$$(kA)(\frac{1}{k}A^{-1}) = AA^{-1} = I$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{k}A^{-1} = (kA)^{-1}, \text{ si } k \neq 0$$

2)

$$A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$$
$$\Longrightarrow (A^{-1})^{-1} = A$$

3)

$$A^m(A^{-1})^m = I^m = I$$
$$\Longrightarrow (A^{-1})^m = (A^m)^{-1};\ m \in \mathbb{Z}^+$$

4)

$$\text{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})\,\text{diag}(\frac{1}{d_{11}}, \frac{1}{d_{22}}, \ldots, \frac{1}{d_{nn}}) = I$$
$$\Longrightarrow D^{-1} = \text{diag}(d_{11}^{-1}, d_{22}^{-1}, \ldots, d_{nn}^{-1})$$

5)

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

$$= AIA^{-1}$$
$$= AA^{-1}$$
$$= I$$

entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

si AB es invertible.

6)

$$AA^{-1} = I$$
$$|AA^{-1}| = |I| = 1$$
$$|A||A^{-1}| = 1$$
$$\Longrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

7)

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

entonces

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

◇

2.1.2 Propiedades de la matriz adjunta

1) $|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}$, si A tiene orden n

2) $\operatorname{adj}(A^T) = (\operatorname{adj}(A))^T$

3) $\operatorname{adj}(A^{-1}) = (\operatorname{adj}(A))^{-1}$

4) $\operatorname{adj}(\alpha A) = \alpha^{n-1}\operatorname{adj}(A)$ si A tiene orden n.

5) $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$

6) $\text{adj}(A^m) = (\text{adj}(A))^m$; $m \in \mathbb{Z}^+$

7) Si A es simétrica, entonces $\text{adj}(A)$ es simétrica.

8) Si A es antisimétrica, entonces

$$\text{adj}(A) \text{ es } \begin{cases} \text{simétrica,} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{antisimétrica,} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Demostración.

1) Sabemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}(A) \text{ entonces } \text{adj}(A) = |A|A^{-1}$$

$$\begin{aligned} |\,\text{adj}(A)| &= \big||A|A^{-1}\big| = |A|^n|A^{-1}| \\ &= |A|^n|A|^{-1} = |A|^{n-1} \end{aligned}$$

Si A tiene orden n.

2)

$$\begin{aligned} \text{adj}(A^T) &= |A^T|(A^T)^{-1} = |A|(A^{-1})^T \\ &= (|A|A^{-1})^T = \big(\text{adj}(A)\big)^T \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \text{adj}(A)\,\text{adj}(A^{-1}) &= (|A|A^{-1})(|A^{-1}|A) \\ &= |A||A^{-1}|A^{-1}A = I \end{aligned}$$

entonces

$$\text{adj}(A^{-1}) = \big(\text{adj}(A)\big)^{-1}$$

4)

$$\begin{aligned} \text{adj}(\alpha A) &= |\alpha A|(\alpha A)^{-1} = \alpha^n|A|\frac{1}{\alpha}A^{-1} \\ &= \alpha^{n-1}\,\text{adj}(A) \end{aligned}$$

si A tiene orden n y $\alpha \neq 0$

5)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{adj}(AB) &= |AB|(AB)^{-1} = |A||B|(B^{-1}A^{-1}) \\
&= |A|\big(\operatorname{adj}(B)\big)A^{-1} = \operatorname{adj}(B)|A|A^{-1} \\
&= \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)
\end{aligned}
$$

6) Es la generalización de la Propiedad 5) para m matrices, cuando $A = B$

7) Si A es simétrica entonces $A = A^T$

Luego

$$\big(\operatorname{adj}(A)\big)^T = \operatorname{adj}(A^T) = \operatorname{adj}(A)$$

por tanto, $\operatorname{adj}(A)$ es simétrica.

8) Si A es antisimétrica, entonces $A = -A^T$

$$
\begin{aligned}
\big(\operatorname{adj}(A)\big)^T &= \operatorname{adj}(A^T) = \operatorname{adj}(-A) \\
&= |-A|(-A)^{-1} = (-1)^n|A|\frac{1}{(-1)}A^{-1} \\
&= (-1)^{n-1}\operatorname{adj}(A)
\end{aligned}
$$

(a) Si n es impar, entonces $n-1$ es par, luego

$$\big(\operatorname{adj}(A)\big)^T = \operatorname{adj}(A)$$

por lo tanto, la $\operatorname{adj}(A)$ es simétrica, si n es impar.

(b) Si n es par, entonces $n-1$ es impar. Luego,

$$\big(\operatorname{adj}(A)\big)^T = -\operatorname{adj}(A)$$

por lo tanto, la $\operatorname{adj}(A)$ es antisimétrica si n es par.

◇

Ejemplo 2.6

Sea A una matriz cuadrada con determinante positivo. Si

$$\operatorname{adj}(kA) = 4\operatorname{adj}(A) = 4\begin{pmatrix} 4 & k & 1 \\ -11 & 7 & -3 \\ 3 & k & 1 \end{pmatrix} \text{ y } |k\operatorname{adj}(A)| = -8$$

calcular A y A^{-1}.

Solución.
En efecto

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(kA) &= |kA|(kA)^{-1} = k^3|A|\frac{1}{k}A^{-1} \\ &= k^2\operatorname{adj}(A) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(kA) &= k^2\operatorname{adj}(A) \\ &= 4\operatorname{adj}(A) = 4\begin{pmatrix} 4 & k & 1 \\ -11 & 7 & -3 \\ 3 & k & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces

$$k^2 = 4 \text{ y } \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & k & 1 \\ -11 & 7 & -3 \\ 3 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$k^2 = 4 \Longrightarrow k = \pm 2$$

$$|k\operatorname{adj}(A)| = k^3|\operatorname{adj}(A)| = k^3|A|^2 = -8 \text{ (dato)}$$

para que este resultado tenga sentido $k < 0$, entonces $k = -2$, luego

$$|A|^2 = 1 \Longrightarrow |A| = \pm 1, \quad |A| > 0 \Longrightarrow |A| = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -11 & 7 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.7

Si

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & 5 & z \\ x & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada con determinante negativo, $|\operatorname{adj}(3A)| = 729$ y

$$\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 15 & \cdot & -3 \end{pmatrix}$$

Calcular A y A^{-1}, si $\{x, y, z\} \subset \mathbb{Z}$

Solución.

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(\alpha A) &= |\alpha A|(\alpha A)^{-1} = \alpha^3 |A| \frac{1}{\alpha} A^{-1} \\ &= \alpha^2 \operatorname{adj}(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{adj}(\alpha A)| &= |\alpha^2 \operatorname{adj}(A)| = (\alpha^2)^3 |\operatorname{adj}(A)| \\ &= \alpha^6 |A|^2 \end{aligned}$$

Si $\alpha = 3$

$$|\operatorname{adj}(3A)| = 3^6 |A|^2 = 729$$

$$|A|^2 = 1$$

$$|A| = \pm 1, \quad |A| = -1 < 0 \text{ (dato)}$$

$$\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} = 3A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 15 & \cdot & -3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$$

$$|A| = x(40) - y(8y - xz) + z(-5x) = -1$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = -5x = -5 \Longrightarrow x = 1$$
$$A_{33} = 5x - y^2 = 1 \Longrightarrow y^2 = 5x - 1 = 4 \Longrightarrow y = \pm 2$$

Si $y = -2$

$$|A| = 40 + 2(-16 - z) - 5z = -1$$
$$-7z = -9, \quad z \notin \mathbb{Z}$$

$y = -2$ no resuelve el problema.
Si $y = 2$

$$|A| = 40 - 2(16 - z) - 5z = -1$$
$$z = 3 \in \mathbb{Z}$$

Por tanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = 40 \qquad A_{12} = -13 \qquad A_{13} = -5$$
$$A_{21} = -16 \qquad A_{22} = 5 \qquad A_{23} = 2$$

$$A_{31} = -9 \qquad A_{32} = 3 \qquad A_{33} = 1$$

entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}(A) = \frac{1}{(-1)}\begin{pmatrix} 40 & -16 & -9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.8

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 4 & y \\ z & 7 & 9 \\ x & 5 & x \end{pmatrix}$$

con $|A| > 0$, donde

$$|\,\mathrm{adj}(2A)| = 256, \qquad -\frac{1}{2}\,\mathrm{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 19 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -11 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Calcular $A + 2A^{-1}$

Solución.

$$|A| = x(7x - 45) - 4(zx - 9x) + y(5z - 7x) > 0$$

Como en el ejemplo anterior, $\mathrm{adj}(\alpha A) = \alpha^6 |A|^2$

$\alpha = 2$

$$|\,\mathrm{adj}(2A)| = 2^6 |A|^2 = 256$$

$$|A|^2 = 4$$

$$|A| = \pm 2$$

$$|A| = 2 > 0$$

$$-\frac{1}{2}\,\text{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} 19 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot \\ -11 & \cdot\cdot \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -38 & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot\cdot \\ 22 & \cdot\cdot \end{pmatrix} = \left(\text{adj}(A)\right)^T$$

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -38 & \cdot & 22 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = 7x - 45 = -38 \Longrightarrow x = 1$$
$$A_{31} = 36 - 7y = 22 \Longrightarrow y = 2$$

$$|A| = (7-45) - 4(z-9) + 2(5z-7) = 2 \Longrightarrow z = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -38 & 6 & 22 \\ 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -38 & 6 & 22 \\ 6 & -1 & -3 \\ 8 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A + 2A^{-1} = \begin{pmatrix} -37 & 10 & 24 \\ 9 & 6 & 6 \\ 9 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$A^T = -A$

Ejemplo 2.9

A es una matriz antisimétrica y

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a & x & 2 & 3 \\ \cdot & b & b+c & -2 \\ \cdot & a+d & c & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & d \end{pmatrix}$$

donde $|\,\text{adj}(-2A)^T| = 2^{18}$. Encontrar A^{-1} si $x > 0$

Si A es una matriz antisimétrica $\Rightarrow A = -A^T$

Por propiedad 8: Si A es matriz antisimétrica de orden par, entonces $\text{adj}(A)$ es antisimétrica. Por tanto,

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & x & 2 & 3 \\ -x & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{adj}(-2A)^T = (\text{adj}(-2A))^T \Rightarrow |\text{adj}(-2A)^T| = |(\text{adj}(-2A))^T| = |\text{adj}(-2A)|$

Sabemos que

$$\text{adj}(\alpha A) = |\alpha A|(\alpha A)^{-1} = \alpha^4|A|\frac{1}{\alpha}A^{-1} = \alpha^3\,\text{adj}(A)$$

$$|\text{adj}(\alpha A)| = |\alpha^3\,\text{adj}(A)| = (\alpha^3)^4|A|^3$$

Si $\alpha = -2 \Rightarrow |\text{adj}(-2A)^T| = ((-2)^3)^4|A|^3 = (-2)^{12}|A|^3 = (2)^{18}$

$$|A|^3 = 2^6 \Rightarrow |A| = 4$$

$$|\text{adj}(A)| = |A|^3 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 64 \Rightarrow (x+4)(x-12) = 0$$

Si $x = 12 > 0 \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 12 & 2 & 3 \\ -12 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1

Sean A, B y C matrices no singulares de orden n. Si $A = \text{adj}(B)$, $B = \text{adj}(C)$, $C = \text{adj}(A)$, además B y C son matrices conmutativas D. q. $(\text{adj}(ABC))^{-1}(ABC) = I$.

Solución.

Debemos demostrar que $(ABC)^{-1} = (\text{adj}(ABC))^{-1}$ o lo que es lo mismo que:

$$(ABC) = \text{adj}(ABC) \tag{2.1}$$

B y C son conmutativas entonces $BC = CB$. En (2.1):

$$\begin{aligned}\text{adj}(ABC) &= \text{adj}(A(BC)) = \text{adj}(A(CB)) = \text{adj}(ACB)\\ &= \text{adj}(B)\,\text{adj}(C)\,\text{adj}(A) = ABC\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2

Sea A una matriz no singular de orden n. Si $A^6 + A^2 = O$ donde O es la matriz nula. D. q. $\text{adj}(A)\,\text{adj}(rA^7) = r^{n-1}I$, $r \neq 0$, I matriz identidad de orden n.

Solución.

En efecto:

$$A^6 + A^2 = A^2(A^4 + I) = O \Rightarrow A^4 + I = O \Rightarrow A^4 = -I$$

$$\begin{aligned}|A^4| &= |A|^4 = |-I| = (-1)^n|I| = (-1)^n\\ |A^8| &= |A|^4|A|^4 = (-1)^{2n} = 1;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{adj}(A)\,\text{adj}(rA^7) &= \text{adj}((rA^7)A) = \text{adj}(rA^8) = |rA^8|(rA^8)^{-1}\\ &= r^n|A^8|\frac{1}{r}A^{-8} = r^{n-1}\,\text{adj}(A^8)\end{aligned}$$

Se sabe que $A^6 + A^2 = O$, entonces

$$\begin{aligned}(A^6 + A^2)A^2 &= OA^2\\ A^8 + A^4 = O &\Rightarrow A^8 = -A^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{adj}(A)\,\text{adj}(rA^7) &= r^{n-1}\,\text{adj}(A^8) = r^{n-1}\,\text{adj}(-A^4)\\ &= r^{n-1}\,\text{adj}(I) = r^{n-1}I \qquad r \neq 0\end{aligned}$$

CamScanner

Ejercicio 2.3

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz antisimétrica de orden impar, donde $a_{ij} = ij$. Encontrar la matriz B, si se sabe que $B(\text{adj}(A)) = \text{cof}(\text{cof}(2A))$

Solución.

Por la Propiedad 8: si A es una matriz antisimétrica de orden impar, entonces $\text{adj}(A)$ es simétrica.

$$\begin{aligned}\text{adj}(2A) = (\text{cof}(2A))^T \Rightarrow \text{cof}(2A) = (\text{adj}(2A))^T &= \text{adj}(2A)\\ &= |2A|(2A)^{-1} = 2^n|A|\frac{1}{2}A^{-1}\\ &= 2^{n-1}\,\text{adj}(A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cof}(\text{cof}(2A)) &= \text{cof}(2^{n-1}\,\text{adj}(A))\\ &= (\text{adj}(2^{n-1}\,\text{adj}(A)))^T\\ &= \text{adj}(2^{n-1}\,\text{adj}(A))\\ &= |2^{n-1}\,\text{adj}(A)|(2^{n-1}\,\text{adj}(A))^{-1}\\ &= (2^{n-1})^n|\,\text{adj}(A)|\frac{1}{2^{n-1}}(\text{adj}(A))^{-1}\\ &= 2^{n^2-2n+1}\,\text{adj}(\text{adj}(A)), \qquad \text{adj}(A) = |A|A^{-1}\\ &= 2^{n^2-2n+1}|\,\text{adj}(A)|(\text{adj}(A))^{-1}\\ &= 2^{n^2-2n+1}|A|^{n-1}(\text{adj}(A))^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(dato)} \qquad B\,\text{adj}(A) &= \text{cof}(\text{cof}(2A))\\ &= 2^{n^2-2n+1}|A|^{n-1}(\text{adj}(A))^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= 2^{n^2-2n+1}|A|^{n-1}(\text{adj}(A))^{-2}\\ &= 2^{n^2-2n+1}|A|^{n-1}\left(\frac{1}{|A|}A\right)^2\end{aligned}$$

$$= 2^{n^2-2n+1}|A|^{n-3}A^2$$

Sabemos que A es antisimétrica, entonces

$$A = -A^T$$
$$|A| = |-A^T| = (-1)^n|A^T| = (-1)^n|A|$$

Si n es impar, entonces

$$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

Entonces $B = O$.

Ejercicio 2.4

Sea la matriz cuadrada no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$$

donde a y b son números reales.
Si $\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{4}|A^T|A$ y $|\operatorname{adj}(\frac{1}{4}A)| = (-\frac{1}{16})^3$. Calcular A y A^{-4}

Solución.

A es simétrica $\Rightarrow A = A^T$ y $|A| = |A^T|$ ($|A| \neq 0$)

$$\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{4}|A^T|A \Rightarrow \frac{\operatorname{adj}(A)}{|A^T|} = \frac{1}{4}A \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}A$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{4}AA = \frac{1}{4}A^2 \Rightarrow I = \frac{1}{4}A^2 \Rightarrow A^2 = 4I$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4a^2 & 2a^2+2ab & 2a^2+2ab & 2a^2+2ab \\ 2a^2+2ab & 2a^2+2b^2 & a^2+2ab+b^2 & a^2+2ab+b^2 \\ 2a^2+2ab & a^2+2ab+b^2 & 2a^2+2b^2 & a^2+2ab+b^2 \\ 2a^2+2ab & a^2+2ab+b^2 & a^2+2ab+b^2 & 2a^2+2b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 4I \Rightarrow \begin{cases} (1)4a^2 = 4 & \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ (2)2a^2+2ab = 0 & \Rightarrow 2+2(\pm 1)b = 0 \Rightarrow b = -1, b = 1 \\ (3)2a^2+2b^2 = 4 & \\ (4)a^2+2ab+b^2 = 0 \Rightarrow 1+2ab+1 = 0 \Rightarrow ab = -1 & \end{cases}$$

Analizando los casos:

$$\text{para} \begin{cases} a = 1, & b = -1 \\ a = -1, & b = 1 \end{cases}$$

se cumple la condición $A^2 = 4I$.

Se sabe que

$$|\operatorname{adj}(A)| = |A|^{n-1}, \text{ si } A \text{ tiene orden } n$$
$$\operatorname{adj}(\alpha A) = \alpha^{n-1} \operatorname{adj}(A)$$
$$|\operatorname{adj}(\alpha A)| = (\alpha^{n-1})^n |A|^{n-1}$$

En este caso, $n = 4$

$$|\operatorname{adj}(\frac{1}{4}A)| = ((\frac{1}{4})^3)^4 |A|^3 = (-\frac{1}{16})^3$$

entonces

$$|A|^3 = -16^3 \Rightarrow |A| = -16$$

Por otro lado:

$$|A| = 2a(b-a)^3$$

$$|A| = -16 \Rightarrow 2a(b-a)^3 = -16 \Rightarrow a(b-a)^3 = -8$$

Si $a = 1, b = -1 \Rightarrow |A| = 1(-1-1)^3 = (-2)^3 = -8$ (cumple)

Si $a = -1, b = 1 \Rightarrow |A| = (-1)(1-(-1))^3 = -8$ (cumple)

a) Si tenemos $a = 1, b = -1$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{4}A$$

$$A^2 = AA = 4I$$
$$A^2A^{-2} = (4I)A^{-2} = 4A^{-2} \Rightarrow I = 4A^{-2} \Rightarrow A^{-2} = \frac{1}{4}I$$
$$A^{-4} = A^{-2}A^{-2} = \left(\frac{1}{4}I\right)\left(\frac{1}{4}I\right) = \frac{1}{16}I$$

b) Si tomamos $a = -1, b = 1$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

obtenemos el mismo resultado.

Ejercicio 2.5

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ 0 & -b & b \\ b & -a & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2b & -c & -b \\ 2b & 3c & -b \\ 2b & 5 & -b \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, $|\text{adj}(A)| = 64$ y $ab(a-c) + b^2(b-c) < 0$. Calcular $\sqrt{|A - 8A^{-1}|}$

Solución.

$$ab(a-c) + b^2(b-c) < 0 \Rightarrow |A| < 0$$
$$|\text{adj}(A)| = |A|^2 = 64 \Rightarrow |A| = \pm 8,\ |A| < 0 \Rightarrow |A| = -8$$

$$\text{adj}(A) = |A|A^{-1} \Rightarrow A\,\text{adj}(A) = A|A|A^{-1} \Rightarrow A\,\text{adj}(A) = |A|I$$

Luego

$$A\,\text{adj}(A) = -8I \tag{2.2}$$

$$A\,\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ 0 & -b & b \\ b & -a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2b & -c & -b \\ 2b & 3c & -b \\ 2b & 5 & -b \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2ab+2b^2-2bc & -ac+3bc-5c & -ab-b^2+bc \\ -2b^2+2b^2 & -3bc+5b & b^2-b^2 \\ -2b^2-2ab+2bc & -bc-3ac+5c & -b^2+ab-bc \end{pmatrix}$$
$$= -8I$$

Igualando los términos correspondientes:

$$-2ab+2b^2-2bc = -8 \quad -ac+3bc-5c = 0 \quad -ab-b^2+bc = 0 \tag{2.3}$$

$$0 \qquad -3bc+5b = -8 \qquad 0$$
$$-2b^2-2ab+2bc = 0 \quad -bc-3ac+5c = 0 \quad -b^2+ab-bc = -8 \tag{2.4}$$

Sumando las ecuaciones (2.3) y (2.4).

$$-2b^2 = -8 \Rightarrow b^2 = 4$$
$$b = \pm 2 \Rightarrow b = 2 > 0$$

También

$$-3bc+5b = -8 \quad \Rightarrow b(-3c+5) = -8 \quad \Rightarrow c = 3$$
$$-ac+3bc-5c = 0 \Rightarrow -3a+18-15 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad -8A^{-1} = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 4 & 9 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A - 8A^{-1} = A + \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 4 & 7 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 8A^{-1}| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 4 & 7 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3(7) + 1(4) - 5(16 - 42) = 113$$

$$\sqrt{|A - 8A^{-1}|} = \sqrt{113}$$

Ejercicio 2.6

Si A y B son matrices cuadradas de orden n, no singulares. D.q.

$$(A - B)^{-1}A(A + B)^{-1} = (A + B)^{-1}A(A - B)^{-1}$$

Solución.

$$(A - B)^{-1}A(A + B)^{-1} = ((A + B)A^{-1}(A - B))^{-1} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{(A + B)A^{-1}}(A - B) &= (AA^{-1} + BA^{-1})(A - B) \\
&= (I + BA^{-1})(A - B) \\
&= I(A - B) + BA^{-1}(A - B) \\
&= A - B + B - BA^{-1}B \\
&= (A + B) - (B + BA^{-1}B) \\
&= (A + B) - (BA^{-1}A + BA^{-1}B) \\
&= (A + B) - BA^{-1}(A + B) \\
&= (I - BA^{-1})(A + B) \\
&= (AA^{-1} - BA^{-1})(A + B) \\
&= (A - B)A^{-1}(A + B) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Reemplazando (2.6) en (2.5)

$$(A - B)^{-1}A(A + B)^{-1} = ((A + B)A^{-1}(A - B))^{-1}$$

$$= ((A - B)A^{-1}(A + B))^{-1}$$
$$= (A + B)^{-1}A(A - B)^{-1}$$

Ejercicio 2.7

A es una matriz no singular con determinante entero

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = -\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \text{ y } A\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Si $b^2 - ac = -|A|$. Calcular A y A^{-1}.

Solución.

$$|A\operatorname{cof}(A)| = -1$$
$$|A||\operatorname{cof}(A)| = -1 \tag{2.7}$$
$$|\operatorname{cof}(A)| = |(\operatorname{cof}(A))^T| = |\operatorname{adj}(A)| = |A|^2$$

En (2.7)

$$|A||\operatorname{cof}(A)| = |A|^3 = -1 \Rightarrow |A| = -1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) &= |\operatorname{adj}(A)|(\operatorname{adj}(A))^{-1} \\ &= |A|^2 \operatorname{adj}(A^{-1}) \\ &= |A|^2(|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}) \\ &= |A|^2 \frac{1}{|A|} A \\ &= |A|A \\ &= -A \end{aligned}$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & a & b \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, \quad b^2 - ac = 1 \text{ (dato)}$$

$$|A| = -a(b^2 - ac) = -1$$
$$a = 1$$

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -ab & a^2 \\ -(b^2 - ac) & ab & -a^2 \\ b^2 - ac & -(ab - ac) & a^2 - ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c - b & 1 - b \end{pmatrix}$$

$$A \operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -b & 1 \\ -1 & b & -1 \\ 1 & c - b & 1 - b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b + c & -b + b^2 + c(c - b) & 1 - b + c(1 - b) \\ -1 + b & b(c - b) & b(1 - b) \\ -1 + b & b + b(c - b) & -1 + b(1 - b) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-1 + b = 1 \Rightarrow b = 2$$
$$-b + c = 1 \Rightarrow c = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.8

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n, donde $AA^T = I$, $BB^T = I$ y $AB = BA$. Si

$$(B^T + A^T)^{-1} C^T (B^T - A^T) = (B - A)(B + A)^{-1}.$$

Hallar C

Solución.
En efecto

$$\left.\begin{array}{l} AA^T = I \Rightarrow A^T = A^{-1} \\ BB^T = I \Rightarrow B^T = B^{-1} \end{array}\right\} \text{ y } AB = BA \Rightarrow \begin{cases} A = BAB^T \\ B = A^T BA \end{cases}$$

$$(B^T + A^T)^{-1} C^T (B^T - A^T) = (B - A)(B + A)^{-1} \qquad \text{(dato)}$$

$$C^T (B^T - A^T) = (B^T + A^T)(B - A)(B + A)^{-1}$$

$$C^T (B^T - A^T)(B + A) = (B^T + A^T)(B - A) \qquad (2.8)$$

D.q

$$(B^T - A^T)(B + A) = (B^T + A^T)(B - A)$$

$$(B^T - A^T)(B + A) = \cancel{B^T B} + B^T A - A^T B - \cancel{A^T A} = B^T A - A^T B = M$$

$$(B^T + A^T)(B - A) = \cancel{B^T B} - B^T A + A^T B - \cancel{A^T A} = -(B^T A - A^T B) = -M$$

En (2.8):

$$C^T M = -M \Rightarrow (C^T + I)M = O \Rightarrow C^T = -I \Rightarrow C = -I$$

Ejercicio 2.9

Si $AB = I = BA$ y $A^n = O; \forall n \in \mathbb{Z}^+$ entonces

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

Solución.
Es equivalente a d.q.

$$(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = I$$

y

$$(I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})(I - A) = I$$

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = \frac{I - A^n}{I - A}$$

CamScanner

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=I-A^n=I-O=I$$
$$(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1})(I-A)=I-A^n=I-O=I$$

Ejercicio 2.10

Si $S_m=I+A+A^2+\cdots+A^m$, $m\in\mathbb{Z}^+$ y las matrices $A, I-A, I+A$ son no singulares. D.q.

$$S_m(I-A)^2(I+A)^{-1}=(I+A)^{-1}(I-A^{m+1})(I-A)$$

Solución.
En efecto:

$$S_m=\frac{I-A^{m+1}}{I-A}\Rightarrow S_m(I-A)=I-A^{m+1}$$

$$\begin{aligned}
S_m(I-A)^2(I+A)^{-1}&=(I-A^{m+1})\underbrace{(I-A)(I+A)^{-1}}\\
&=(I-A^{m+1})[(I+A)^{-1}-\underbrace{A(I+A)^{-1}}]\\
&=(I-A^{m+1})[(I+A)^{-1}-(\underbrace{(I+A)A^{-1}})^{-1}]\\
&=(I-A^{m+1})[(I+A)^{-1}-(A^{-1}+I)^{-1}]\\
&=(I-A^{m+1})[(I+A)^{-1}-(A^{-1}(I+A))^{-1}]\\
&=(I-A^{m+1})[\underbrace{(I+A)^{-1}-(I+A)^{-1}A}]\\
&=\underbrace{(I-A^{m+1})(I+A)^{-1}}(I-A)\\
&=(I+A)^{-1}-\underbrace{A^{m+1}(I+A)^{-1}}(I-A)\\
&=(I+A)^{-1}-(\underbrace{(I+A)A^{-m-1}})^{-1}(I-A)\\
&=(I+A)^{-1}-(\underbrace{A^{-m-1}+A^{-m}})^{-1}(I-A)\\
&=(I+A)^{-1}-(\underbrace{A^{-m-1}(I+A)})^{-1}(I-A)\\
&=\underbrace{(I+A)^{-1}-((I+A)^{-1}A^{m+1})}(I-A)\\
&=(I+A)^{-1}(I-A^{m+1})(I-A)
\end{aligned}$$

Ejercicio 2.11

Si $AA^T = A^TA = I$ y $(I + A)$ es no singular, demostrar que $(I - A)(I + A)^{-1}$ es antisimétrica.

Solución.

En efecto, debemos d.q.

$$(I - A)(I + A)^{-1} = -((I - A)(I + A)^{-1})^T$$

$$\begin{aligned}
-((I - A)(I + A)^{-1})^T &= -((I + A)^{-1})^T(I - A)^T \\
&= -((I + A^T)^{-1}(I - A^T)) \\
&= -((I + A^{-1})^{-1}(I - A^{-1})) \\
&= (I + A^{-1})^{-1}(A^{-1} - I) \\
&= (A^{-1}(A + I))^{-1}A^{-1}(I - A) \\
&= (A + I)^{-1}\underbrace{AA^{-1}}(I - A) \\
&= (A + I)^{-1}(I - A) \\
&= (I + A)^{-1}(I - A) \\
&= (I + A)^{-1} - (I + A)^{-1}A \\
&= (I + A)^{-1} - (A^{-1}(I + A))^{-1} \\
&= (I + A)^{-1} - (A^{-1} + I)^{-1} \\
&= (I + A)^{-1} - ((I + A)A^{-1})^{-1} \\
&= (I + A)^{-1} - A(I + A)^{-1} \\
&= (I - A)(I + A)^{-1}
\end{aligned}$$

Por tanto $(I - A)(I + A)^{-1}$ es una matriz antisimétrica.

Ejercicio 2.12

Si A y B son matrices cuadradas no singulares. D.q.

$$(I + AB^{-1})^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} = B(A + B)^{-1}(I + A)^{-1}(A - I)$$

CamScanner

Solución.

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{(I + AB^{-1})}^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= (\underbrace{A(A^{-1} + B^{-1})})^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= (\underbrace{A^{-1} + B^{-1}})^{-1}A^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= (\underbrace{A^{-1}(I + AB^{-1})})^{-1}A^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= (I + AB^{-1})^{-1}\underbrace{AA^{-1}}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= (\underbrace{I + AB^{-1}})^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= (\underbrace{BB^{-1} + AB^{-1}})^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= ((B + A)B^{-1})^{-1}(A - I)(I + A)^{-1} \\
&= B(B + A)^{-1}\underbrace{(A - I)(I + A)^{-1}} \\
&= B(A + B)^{-1}[\underbrace{A(I + A)^{-1}} - (I + A)^{-1}] \\
&= B(A + B)^{-1}[(\underbrace{(I + A)A^{-1}})^{-1} - (I + A)^{-1}] \\
&= B(A + B)^{-1}[(\underbrace{A^{-1} + I})^{-1} - (I + A)^{-1}] \\
&= B(A + B)^{-1}[(\underbrace{A^{-1}(I + A)})^{-1} - (I + A)^{-1}] \\
&= B(A + B)^{-1}\underbrace{[(I + A)^{-1}A - (I + A)^{-1}]} \\
&= B(A + B)^{-1}(I + A)^{-1}(A - I)
\end{aligned}
$$

2.1.4 Ejercicios propuestos

1) Si A y B son matrices simétricas y conmutativas, entonces BA^{-1} y AB^{-1} son simétricas.

2) Si A, B y C son matrices cuadradas de orden n, entonces

$$\text{adj}(ABC) = \text{adj}(C)\,\text{adj}(B)\,\text{adj}(A).$$

3) Si A y B son matrices conmutativas y simétricas. D.q. $M = AB^{-1} + A^{-1}B + B^{-1}A^{-1}$ es simétrica.

4) Si A y B son matrices antisimétricas y conmutativas, entonces $(BA)^{-1}$ es antisimétrica.

5) Si $M = a^{1-n}A\,\text{adj}(aA^7) - A$ y $N = (a^{1-n}A\,\text{adj}(aA^7) + A)^{-1}$ son conmutativas, entonces $(I - A)(I + A) = O$ y $|A| = 1$.

6) Sean A y B matrices cuadradas de orden n, no singulares tales que $A^3 = -A$, $I+B$ es no singular y $\alpha \neq 0$. D.q. $[(\alpha^{1-n}\,\text{adj}(\alpha A^4)^T)^T - B]$ y $(I+B)^{-1}$ son conmutativas.

7) A y B son matrices conmutativas donde $B^T = B$, $A^T = A^{-1}$, $BA = A^{-1}B$. Si $C = A^TB + B^{-1}A + A^{-1}B^{-1}$, d.q. C es simétrica.

8) Si $AA^T = A^TA = I$, $(I + A)$ y B son matrices no singulares d.q.

$$M = (A^{-1} + B^{-1})A(A + B)^{-1}B(I - A)(I + A^{-1})$$

es antisimétrica.

9) Si A, B, C y D son matrices cuadradas de orden n, $n \times m$, $m \times n$ y $m \times m$ respectivamente. D.q.

$$(A + BDC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

10) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} x & -x & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x(2x + 9) = 0$, entonces las matrices $[I - 3A^3(A^TA)^{-3}(A^3)^T - B]$ y $[I + 3A^3(A^TA)^{-3}(A^3)^T + B]^{-1}$ ¿son conmutativas?

11) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica. Hallar A^2

Rpta: $b = 1,\ a = 3,\ A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 7 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & 18 \end{pmatrix}$

2.2 Rango de una matriz

El rango de una matriz es un concepto de suma utilidad para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 2.5

Si en una matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, suprimimos todo excepto k filas y h columnas, la matriz resultante de orden $k \times h$ se llama sub-matriz de A

Ejemplo 2.10

Sea

$$A = (a_{ij})_{4\times 5} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

1) Si en A suprimimos las filas 1 y 3 y las columnas 2 y 5, obtenemos la matriz A_1 de orden 2×3 donde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

donde $i \neq 1, 3,\ j \neq 2, 5$

2) Si en A suprimimos, además la columna 4, obtenemos la sub-matriz A_2 de orden 2 donde:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{41} & a_{43} \end{pmatrix}$$

donde $i \neq 1, 3,\ j \neq 2, 4, 5$

CamScanner



1) Una sub-matriz será cuadrada, si el número de filas y columnas que quedan son iguales.

2) Para la matriz A dada en el ejemplo anterior, ¿cuántas sub-matrices cuadradas de orden 4,3,2,1 obtendremos?

Definición 2.6

El rango de una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denotado por $r(A)$ es el orden de la sub-matriz cuadrada más grande de A cuyo determinante es diferente de cero.

Ejemplo 2.11

Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de A.

Observamos que $A = (a_{ij})_{3\times 4}$, entonces la sub-matriz cuadrada más grande de A tiene orden 3.

Escribimos todas las sub-matrices cuadradas de orden 3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|A_1| = 0$ $\qquad$ $|A_2| = 12 \neq 0$

Luego el $r(A) = 3$, puesto que 3 es el orden de la sub-matriz cuadrada más grande de A con determinante diferente de cero. Basta con encontrar una sub-matriz cuadrada de orden 3 con determinante $\neq 0$ para afirmar que el $r(A) = 3$.



Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de A.

$A = (a_{ij})_{3\times 4}$, entonces la sub-matriz cuadrada más grande de A tiene orden 3.

Escribimos todas las sub-matrices cuadradas de orden 3.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A_1| = 0$ $\quad |A_2| = 0$ $\quad |A_3| = 0$ $\quad |A_4| = 0$

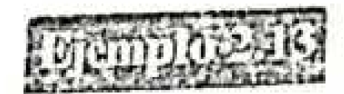
Luego el $r(A) \neq 3$.

Enseguida, la sub-matriz cuadrada más grande de A por analizar tiene orden 2.

En la matriz A, a simple vista, la sub-matriz cuadrada de orden 2 con determinante diferente de cero es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Luego, el $r(A) = 2$ (No se necesita escribir todas las sub-matrices cuadradas de orden 2)



Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de A.

CamScanner

Las sub-matrices cuadradas de mayor orden de A, tienen orden 2.

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A_1| = 0 \qquad |A_2| = 0 \qquad |A_3| = 0$$

Luego, $r(A) \neq 2$

Quedan por analizar las sub-matrices cuadradas de orden 1.

En la matriz A, se tiene 4 sub-matrices cuadradas de orden 1 con determinante diferente de cero, solo basta elegir una para afirmar que el $r(A) = 1$.

Propiedades

1) Sea $A = (a_{ij})_{m\times n}$ una matriz no nula, entonces:

$$0 < r(A) \leq \min\{m, n\}$$

2) La matriz nula tiene rango cero.

3) Si A es una matriz cuadrada de orden n, no singular, entonces $r(A) = n$.

4) Sean A y B dos matrices $\Longrightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

5) Si una matriz de rango k se multiplica en cualquier orden por una matriz no singular, entonces el rango del producto es k.

   En efecto: Si A es no singular y $r(B) = k$, entonces demostramos que $r(AB) = k$.

   Sea $r(AB) = t \Longrightarrow r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ propiedad (4).

$$t \leq \min\{r(A), k\} \Longrightarrow t \leq k \tag{2.9}$$

Pero, $B = A^{-1}(AB) \Longrightarrow k \leq \min\{r(A^{-1}), r(AB)\}$

$$k \leq \min\{r(A^{-1}), t\} \Longrightarrow k \leq t \tag{2.10}$$

De (2.9) y (2.10) se deduce que $k = t$

CamScanner

2.2.1 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.13

Si $I - A$ es una matriz no singular de orden n, demostrar que si A es antisimétrica $\Longrightarrow r(I + A) = n$.

Solución.

Si $I - A$ es no singular $\Longrightarrow |I - A| \neq 0 \Longrightarrow |(I - A)^T| \neq 0 \Longrightarrow |I - A^T| \neq 0$, por hipótesis $A = -A^T \Longrightarrow |I + A| \neq 0$, entonces $r(I + A) = n$.

Ejercicio 2.14

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 1 & x & 2x^2 & 3x^3 & 0 \\ 0 & 1 & x & 2x^2 & 3x^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de x el rango de A tomará su máximo valor?

Solución.

$$|A| = 4x^8 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$$

A es no singular si $x \neq 0$

Entonces el $r(A) = 5$ si $x \neq 0$

Ejercicio 2.15

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix}$$

donde $(y_i - y_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \neq 0; \forall i = 1, 2, \ldots n$.

¿Para qué valor o valores de n el rango de A tomará su máximo valor?

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & \cdots & 1+x_3y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-f_1,f_3-f_1,\ldots f_n-f_1} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 & \cdots & (x_2-x_1)y_n \\ (x_3-x_1)y_1 & (x_3-x_1)y_2 & \cdots & (x_3-x_1)y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ (x_n-x_1)y_1 & (x_n-x_1)y_2 & \cdots & (x_n-x_1)y_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2,f_3,\ldots,f_n]{\text{factor común}}$$

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)\ldots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{vmatrix}$$

$= 0$ para $n > 2$

Si $n = 2$, entonces:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ (x_2-x_1)y_1 & (x_2-x_1)y_2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2]{\text{factor común}} (x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \xrightarrow{f_1-x_1f_2} (x_2-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$= (x_2-x_1)(y_2-y_1) \neq 0$

A es no singular para $n = 2$

Entonces el $r(A) = 2$, para $n = 2$

Para cualquier otro valor de $n \geq 3$, el $r(A) = 2$

2.3 Operaciones elementales sobre las matrices

Las operaciones elementales son operaciones con matrices que no modifican ni su orden ni su rango.

Y consiste en que dada una matriz, puede obtenerse a partir de ella otra matriz más sencilla (en el sentido de introducir más elementos nulos) equivalente a la matriz de partida en la forma que precisaremos más adelante.

Definición 2.7

Se llaman **operaciones elementales por filas** (OEF) en una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a las siguientes operaciones:

1) Al intercambio de dos filas.

2) A la multiplicación de una fila por una constante diferente de cero.

3) A la adición del múltiplo de una fila a otra fila.

Definición 2.8

Se llaman **operaciones elementales por columnas** (OEC) en una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a las siguientes operaciones:

1) Al intercambio de dos columnas.

2) A la multiplicación de una columna por una constante diferente de cero

3) A la adición del múltiplo de una columna a otra columna.

Ejemplo 2.14

Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Aplicando OEF transformar A en una matriz triangular superior.

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\1&2&1&0\\1&2&3&-1\\2&4&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2+f_1}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\1&2&3&-1\\2&4&0&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+f_1}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&2&4&-1\\2&4&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{f_4+2f_1}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&2&4&-1\\0&4&2&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&0&2&-1\\0&4&2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{f_4-2f_2}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&0&2&-1\\0&0&-2&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4+f_3}\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\0&2&2&0\\0&0&2&-1\\0&0&0&4\end{pmatrix}=B$$

$A\sim B$ por OEF

b) Aplicando OEC transformar A en una matriz triangular inferior.

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\1&2&1&0\\1&2&3&-1\\2&4&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3+c_1}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&2&2&0\\1&2&4&-1\\2&4&2&5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-c_2}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&2&-1\\2&4&-2&5\end{pmatrix}\xrightarrow{c_4\times c_3}\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&-1&2\\2&4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4+2c_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} = B$$

$A \sim B$ por OEC

Nota

El símbolo "$\sim$" utilizado para relacionar una matriz con la obtenida al efectuar sobre esta una operación elemental, tendrá pleno significado cuando posteriormente se defina la equivalencia de matrices.

Ejemplo 2.15

Si

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Aplicar OEF para introducir ceros que crezcan fila por fila

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1-f_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} = B$$

$A \sim B$ por OEF

b) Aplicar OEC para introducir ceros que crezcan columna por columna

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1-c_2} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2+5c_1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3-c_1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4+3c_1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ -1 & -2 & 1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_3\times c_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3-2c_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -4 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_4+c_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -4 & -1\end{pmatrix}=B$$

$A \sim B$ por OEC

Definición 2.9

Se dice que una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es **equivalente por filas** a una matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ y se denota por $A \sim B$, si B se puede obtener de A por aplicar un número finito de operaciones elementales por filas.

Ejemplo 2.16

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-2f_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+f_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

A es equivalente por filas a la matriz B, es decir $A \sim B$ por filas.



Una matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ es **equivalente por columnas** a una matriz B y se denota por $A \sim B$ por OEC si B se obtiene de A por aplicar un número finito de operaciones elementales por columnas.

2.4 Matrices escalonadas

Definición 2.10

Una matriz $E = (e_{ij})_{m\times n}$ se llama **escalonada por filas** si y solo si:

1) Las primeras k filas son no nulas y todas las restantes $m-k$ filas son nulas.

2) En cualquiera de las primeras k filas, el primer elemento diferente de cero en cada fila es 1.

3) En cada una de las k filas, el número de ceros anteriores a 1, crece fila por fila.

Nota

Cabe anotar que en una matriz escalonada por filas, si existen filas de ceros, estas se encuentran situadas en la parte inferior de la matriz.

Ejemplo 2.17

Cuáles de las siguientes matrices satisfacen la definición de matrices escalonadas por filas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CamScanner

En efecto:

$A = (a_{ij})_{4\times 5}$ es una matriz escalonada por filas:

Cumple (1) puesto que las tres primeras filas son no nulas y la última fila es nula.

Cumple (2) porque el primer elemento diferente de cero, en cada una de las tres filas no nulas, es 1.

Cumple (3) porque el número de ceros anteriores a 1 crece fila por fila.

Las matrices B y C son también matrices escalonadas por filas.

Las matrices D, G y H no son matrices escalonadas por filas: en D falla (1), en G falla (2), en H falla (3).

Nota

1) Una matriz escalonada por filas generalmente se denota por E.

2) Así como hemos definido matrices escalonadas por filas también se definen las matrices escalonadas por **columnas**, cambiando la denominación de fila por columna.

Ejemplo 2.18

Matrices escalonadas por columnas:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

No son matrices escalonadas por columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

falla (1) falla (2) falla (3)

Definición 2.11

Cualquier matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ puede ser reducida a una matriz escalonada por filas (o columnas) $E = (e_{ij})_{m\times n}$ mediante un número finito de operaciones elementales por filas (o columnas), luego se dice que E es la **forma escalonada por filas (o columnas)** de A, la cual se denota por E_A

Ejemplo 2.19

Reducir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

a su forma escalonada por filas E_A

$$A \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2+2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2\times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4+2f_3]{f_3-4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4-2f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$A \sim E_A$ (A es equivalente por filas a E_A)

Nota

Dos matrices equivalentes por filas o columnas tienen el mismo orden. En seguida veremos que también tienen el mismo rango.

CamScanner

2.5 Obtención del rango por operaciones elementales

Definición 2.12

Dos matrices equivalentes por filas (o columnas) tienen el mismo rango.
Es decir, si $A \sim B \implies r(A) = r(B)$.

Nota

En particular: Si $A \sim E_A \implies r(A) = r(E_A)$

En el ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A \implies r(A) = r(E_A)$$

En E_A: el $r(E_A)$ no puede ser 4, podrá ser 3; 2 o 1. A simple vista, la sub-matriz cuadrada más grande de E_A es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante diferente de cero $\implies r(E_A) = 3$

Por lo tanto, $r(A) = r(E_A) = 3$

En consecuencia, se puede dar la siguiente definición

Definición 2.13

Si $A \sim E_A$ donde E_A es la forma escalonada por filas (o columnas) de A y k es el número de filas (o columnas) no nulas en E_A entonces el $r(E_A) = k = r(A)$.

Es decir, para calcular el rango de una matriz bastará contar el número de filas (o columnas) no nulas en su forma escalonada por filas (o columnas)

Si se aplican operaciones elementales por columna, usando el mismo ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/9 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

E_A es la forma escalonada por columnas de la matriz A

Se nota que el número de columnas no nulas en E_A es 3, por tanto $r(E_A) = 3 = r(A)$

Nota

1) Usando la forma escalonada por filas o la forma escalonada por columnas se obtiene el mismo rango.

2) En adelante trabajaremos con matrices equivalentes por filas, por sus aplicaciones en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.20

Bajo qué condiciones, si las hay, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-2 & 20 \\ 0 & k-1 & h+3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

será menor que 3. ¿Cuál será el rango?

$A = (a_{ij})_{4\times 3}$ entonces el $r(A) \leq 3$.

En este caso, el $r(A)$ está relacionado con el problema de anular filas o columnas.

a) Si anulamos la fila 3, es decir para $k = 1$ y $h = -3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \times f_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 20 \\ 0 & 0 & 3 \\ \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}f_3]{-\frac{1}{5}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ \end{pmatrix} = E_A$$

$$\begin{matrix}0 & 0 & 3\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix}$$



$$A \sim E_A \text{ entonces } r(E_A) = 3 = r(A)$$

b) Si anulamos la columna 2, es decir para $h = 2$ y $k = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{20}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4-3f_2]{f_3-5f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$A \sim E_A \text{ entonces } r(E_A) = 2 = r(A)$$

Ejemplo 2.21

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x, el rango de A será 4,3,2,1?

Solución.

A es una matriz cuadrada de orden 4, entonces vale analizar el determinante de A.

$$|A| = (3x+1)(1-x)^3 \neq 0 \implies r(A) = 4$$

Luego, $r(A) = 4$ si $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{3}, 1 \right\}$

1) Si $x = -\frac{1}{3} \implies$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-3)f_3,(-3)f_4]{(-3)f_1,(-3)f_2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 \times f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4+3f_1]{\substack{f_2-f_1 \\ f_3-f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4+f_3]{\left(-\frac{1}{4}\right) f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{4}\right) f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$A \sim E_A \text{ entonces } r(E_A) = 3 = r(A)$$

2) Si $x = 1 \Longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4-f_1]{\substack{f_2-f_1 \\ f_3-f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$A \sim E_A \text{ entonces } r(E_A) = 1 = r(A)$$

Ejemplo 2.22

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 4a^3 & 3a^2 & 2a & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de "a" el rango de A será 4, 3, 2, 1?

Solución.

A es una matriz cuadrada de orden 4, luego si $|A| \neq 0 \implies r(A) = 4$

En efecto: $|A| = a^2(1-a^2)^4 \neq 0$ (Ver Ejercicio 1.11, Capítulo 1)

$r(A) = 4$ si $a \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$

1) Si $a = 1 \implies$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 - 4f_1]{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$A \sim E_A$ entonces $r(E_A) = 2 = r(A)$

2) Si $a = -1 \implies$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 + 4f_1]{\substack{f_2 + f_1 \\ f_3 - f_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$A \sim E_A$ entonces $r(E_A) = 2 = r(A)$

3) Si $a = 0 \implies$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4-f_2]{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq E_A$$

$$A \sim E_A \text{ entonces } r(E_A) = 2 = r(A)$$

Observamos que para ningún valor de "a", el $r(A) = 3$ y $r(A) = 1$.


Ejemplo 2.23

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 3 & a & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & a & b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b, el rango de A será 3, 2 o 1?

Solución.

Observamos que $A = (a_{ij})_{3\times 5} \implies r(A) \leq 3$.

En este caso la matriz es rectangular, entonces a diferencia de los dos ejemplos anteriores lo único que queda es escalonar la matriz usando operaciones elementales por filas.

$$A \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & a-6 & -5 & 5 & 3-3b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \\ 0 & a-6 & -5 & 5 & 3-3b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & a-6 & -5 & 5 & 3-3b \end{pmatrix}$$





$$\xrightarrow[f_3-(a-6)f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}(4-a) & \frac{1}{2}(a-4)(a-1) & 3-3b \end{pmatrix}$$

Analizamos los elementos de la fila 3:

1) $a=4 \Longrightarrow \begin{cases} b=1 & \Longrightarrow r(A)=2 \\ b\neq 1 & \Longrightarrow r(A)=3 \end{cases}$

2) $a=1 \Longrightarrow \begin{cases} b=1 & \Longrightarrow r(A)=3 \\ b\neq 1 & \Longrightarrow r(A)=3 \end{cases}$

3) $a\neq 1,4 \Longrightarrow \begin{cases} b=1 & \Longrightarrow r(A)=3 \\ b\neq 1 & \Longrightarrow r(A)=3 \end{cases}$

4) $r(A)\neq 1;\ \forall a,b$

2.5.1 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.16

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} x & 2 & 4x & 8x^4 \\ 8x^4 & 4x & 2 & x \\ x & 4 & 12x & 32x^4 \\ 32x^4 & 12x & 4 & x \end{pmatrix}$$

donde $x\neq 0$

¿Para qué valores de x el $r(A)$ es 4, 3, 2, 1?

Solución.

En efecto: A es una matriz cuadrada, entonces calculamos el determinante de A.

$|A|=4x^2(4x^2-1)^4$, $|A|\neq 0 \Longrightarrow r(A)=4$

$r(A)=4$ si $x\in\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{1}{2},0\right\}$

$r(A) < 4$ si $|A| = 0 \implies x = \pm\frac{1}{2}$, $x = 0$
Si $x = 1/2 \implies$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 4 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \sim E_A$ entonces $r(E_A) = r(A) = 2$

Si $x = -\frac{1}{2} \implies$

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 & -2 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 4 & -6 & 2 \\ 2 & -6 & 4 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$A \sim E_A$ entonces $r(E_A) = r(A) = 2$

Si $x = 0 \implies$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$A \sim E_A$ entonces $r(E_A) = 2$

Conclusión:

$$r(A) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{\pm 1/2, 0\} \\ 2, & \text{si } x = \pm 1/2, 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2.17

En la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & a-2 & -1 & b-6 \\ 1 & 2 & 0 & -7 & b-3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b el $r(A)$ será 3?

Solución.

En efecto, observamos que A es una matriz rectangular de orden 4×5. En este caso, buscamos la forma escalonada por filas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & a-2 & -1 & b-6 \\ 1 & 2 & 0 & -7 & b-3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & a & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 & -7 & b \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & b \\ 0 & 0 & a & -1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4-af_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1+7a & b-ab \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 3 \iff -1 + 7a = 0 \text{ y } b(1-a) = 0$$

$$r(A) = 3 \iff a = \frac{1}{7} \text{ y } b = 0$$

Ejercicio 2.18

¿Para qué valor o valores de x y t el rango de la siguiente matriz es 4, 3, 2, 1?

$$M = \begin{pmatrix} x\cos t - \operatorname{sen} t & x \operatorname{sen} t + \cos t & 0 & x \\ -x \operatorname{sen} t & x \cos t & x & 1 \\ \cos t - x \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + x\cos t & x & 0 \\ x \cos t & x \operatorname{sen} t & 1 & x \end{pmatrix}$$

Solución.
Observamos que M se puede descomponer como el producto de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & x \\ 0 & x & x & 1 \\ 1 & x & x & 0 \\ x & 0 & 1 & x \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la propiedad (5): $|B| = 1 \neq 0 \implies r(M) = r(AB) = r(A)$

$|A| = (4x^2 - 1) \implies r(A) = 4$ si $x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$

Si $x = \frac{1}{2} \implies$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$r(E_A) = r(A) = 3$$

Si $x = -\frac{1}{2} \implies$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$r(E_A) = r(A) = 3$$

En conclusión:

$$r(M) = 4 \quad \text{si } x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$$

$$r(M) = 3 \quad \text{si } x = \pm \frac{1}{2}$$

Para ningún valor de x, $r(M) = 2$ y $r(M) = 1$



2.5.2 Ejercicios propuestos

1) Bajo qué condiciones, si las hay, el rango de la matriz A será menor que 3 y cuál será el rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h+3 & 5 \\ 0 & k+5 & h-4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Rpta: $h = -3, k = -5 \implies r(A) = 2$

2) Si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \text{adj}(A), \quad C = \text{adj}(B) \quad \text{y} \quad BXA = C$$

Hallar el rango de X.

3) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & x & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & x & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a+x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & a+x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & a+x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & a+x_4 & x_5 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & a+x_5 \end{pmatrix}$$

donde $a \neq 0$ y $\sum_{i=1}^{5} x_i = 0$. Analizar $r(AB)$.

Rpta:

$|B| = a^5 \neq 0 \implies r(AB) = r(A)$

$|A| = x(x^2-4)(x^2-16) \implies r(A) = 5$ si $x \neq 0, \pm 2, \pm 4$.

$r(A) = 4$ si $x = 0, x = \pm 2, x = \pm 4$.

4) Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 2x+y & x+y & x+y \\ 2x+y & 4x+y & 2x+y & 2x+y \\ 2x & 4x & 3x+y & 3x \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix} \qquad \text{donde } xy = 5,$$

$$B = \begin{pmatrix} a & a & b & a \\ a & 2a & -b & 2a \\ a & 2a & a+2b & 2a \\ a & 2a & a+2b & 2a+b \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = AB$$

¿Para qué valores de x, y, a, b el rango de C es 4, 3, 2, 1, 0?

5) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & cd & a+b & f+g \\ ab & 1 & g & d \\ a-b & f & 1 & d-g+3 \\ 2d & e-d & e+f & 1 \end{pmatrix}$$

B y C son matrices simétricas (C no singular) tales que $BC = CB, AC = B$. ¿Para qué valores de los elementos de A, el rango de A es 4, 3, 2, 1?

Rpta: $|A| = 4(2a-1)$, $r(A) = 4$ si $a \neq 1/2$, $r(A) = 3$ si $a = 1/2$

6) Dadas las siguientes matrices donde $a \neq 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -3 & a-2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a-4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & a-6 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ 3 & b & 2 & 0 \\ 0 & 2 & b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b el $r(AB)$ será 4, 3, 2, 1?

7) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^3 \\ a^3 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^3 \\ \end{pmatrix}$$



¿Para qué valores de a la matriz tiene rango 4, 3, 2, 1?

Rpta: $|A| = (a^2-1)^4 \neq 0, r(A) = 4 \iff a \neq \pm 1$
$r(A) = 2$ si $a = \pm 1$, $r(A) = 3$ no existe

8) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 & 25x^4 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de x la matriz A tiene rango 5, 4, 3?

9) Si

$$A = \begin{pmatrix} 2a+2 & 3 & a & 0 \\ 4a-1 & a+1 & 2a-1 & 2 \\ 5a-4 & a-1 & 3a-4 & 5-a \\ 12-2a & 3 & 6-a & a-4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2b & b^2 & 0 \\ 0 & 1 & 2b & b^2 \\ 1 & b & b^2 & 0 \\ 0 & 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$$

donde $b \neq 0$. ¿Para qué valores de a y b el $r(A)$ tomará su máximo valor?

Rpta: $|A| = (a+3)(a-2)(a+1)(a+4) \neq 0 \implies r(A) = 4$

2.6 Inversa de una matriz por operaciones elementales

Si A es una matriz cuadrada no singular de orden n, entonces la inversa A^{-1} se puede obtener mediante operaciones elementales de una manera más sencilla que utilizando cofactores.

En efecto:

$$(A|I_n) \xrightarrow{OEF} (I_n|A^{-1}) \implies A \sim I \text{ por filas}$$

$$\left(\frac{A}{I_n}\right) \xrightarrow{OEC} \left(\frac{I_n}{A^{-1}}\right) \implies A \sim I \text{ por columnas}$$

Ejemplo 2.24

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

usando operaciones elementales por fila calcular A^{-1} si es que existe.

$|A| = 4 \neq 0 \implies A^{-1}$ existe.

Partimos de la matriz $(A|I_3)_{3\times 6}$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 - f_3]{f_1 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}f_3]{\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobando:

$$A^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

Ejemplo 2.25

Usando operaciones elementales por columna, calcular A^{-1} para la matriz del ejemplo 2.24.

$$\left(\frac{A}{I}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-2c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3-c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}c_3]{\frac{1}{2}c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1-c_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{I}{A^{-1}}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

1) Se obtiene el mismo resultado, pero es más práctico trabajar con operaciones elementales por filas.

2) Una matriz cuadrada posee inversa si y solo si es equivalente a la matriz identidad, para probar este resultado es necesario introducir el concepto de matrices elementales.

CamScanner

Teorema 2.3

Si A y B son matrices cuadradas de orden n, no singulares entonces AB es no singular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demostración. Si A y B son matrices no singulares, entonces existen A^{-1} y B^{-1}. Luego, vemos que:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

Por otro lado:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I$$

Afirmamos que $B^{-1}A^{-1}$ es inversa de AB y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ puesto que la inversa es única. ◇

Teorema 2.4

Si $A_1, A_2, \ldots A_p$ son matrices cuadradas de orden n, no singulares, entonces el producto $A_1A_2\ldots A_p$ es no singular y $(A_1A_2\ldots A_p)^{-1} = A_p^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Demostración. Usando el Principio de Inducción Matemática (PIM), para todo $p \in \mathbb{Z}^+$.

1) Demostramos que la proposición se cumple para $p = 2$, es decir, si A_1 y A_2 son matrices cuadradas no singulares, entonces A_1A_2 es no singular y $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$ (por el Teorema 2.3).

2) Supongamos que la proposición se verifica para $p = h$, es decir, si el producto $A_1A_2\ldots A_h$ es no singular, entonces $(A_1A_2\ldots A_h)^{-1} = A_h^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

3) Usando el carácter condicional del paso 2) demostraremos que la proposición se cumple para $p = h+1$. En efecto, si A_{h+1} es no singular $A_1A_2\ldots A_hA_{h+1} = (A_1A_2\ldots A_h)A_{h+1}$ y el producto es no singular

$$(A_1A_2\ldots A_hA_{h+1})^{-1} = ((A_1A_2\ldots A_h)A_{h+1})^{-1}$$

$$= A_{h+1}^{-1}(A_1A_2\dots A_h)^{-1} \quad \text{(Teorema 2.3)}$$



$$= A_{h+1}^{-1}A_h^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

por la hipótesis de inducción.

Entonces hemos demostrado, usando el PIM, que la proposición se verifica $\forall p \in \mathbb{Z}^+$ ◇

2.7 Matrices elementales y un método para factorizar la matriz inversa

Hemos definido tres tipos de operaciones elementales por filas (o columnas) en una matriz. Estas operaciones se pueden representar mediante matrices cuadradas no singulares que se denominan **matrices elementales.**

Definición 2.14

Una **matriz elemental** fila de orden n es una matriz cuadrada de orden n que se obtiene de aplicar una sola operación elemental en una fila de I_n.

Emplearemos la siguiente notación para identificar las tres clases de matrices elementales:

F_{st} denota la matriz elemental fila obtenida de aplicar la operación elemental $f_s \times f_t$ a la matriz identidad I.

$F_s(k); k \neq 0$ denota la matriz elemental fila obtenida de aplicar a la matriz identidad I la operación elemental kf_s.

$F_{st}(k)$ denota la matriz elemental fila obtenida de aplicar la operación elemental $f_t + kf_s$ a la matriz identidad I.



Ejemplo 2.26

Para la matriz identidad de orden 3:

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{kf_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}; \quad k \neq 0$$

$$F_{31}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 + kf_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

Presentamos a continuación el efecto que produce en una matriz multiplicar por la izquierda por cada una de las matrices elementales.

Ejemplo 2.27

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$F_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que la multiplicación a la izquierda de A por F_{12} equivale a aplicar la operación elemental $f_1 \times f_2$ directamente en A.

b)

$$F_3(k)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ k & -k & 6k & 0 \end{pmatrix}, \quad k \neq 0$$

La multiplicación a la izquierda de A por $F_3(k)$ equivale a aplicar la operación elemental kf_3 directamente en A.

c)

$$F_{31}(k)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+k & -4-k & 1+6k & 7 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

La multiplicación a la izquierda de A por $F_{31}(k)$ equivale a aplicar la operación elemental $f_1 + kf_3$ directamente en A.

Nota

Las matrices elementales son matrices no singulares y, por tanto, son invertibles.

Teorema 2.5

Cada matriz elemental fila de orden n tiene una inversa que es también una matriz elemental del mismo tipo.

1) $(F_{st})^{-1} = F_{st}$

2) $(F_s(k))^{-1} = F_s\left(\frac{1}{k}\right); k \neq 0$

3) $(F_{st}(k))^{-1} = F_{st}(-k)$

Ejemplo 2.28

Hallar $(F_{12})^{-1}$, $(F_3(k))^{-1}$, $(F_{31}(k))^{-1}$

CamScanner

$$(F_{12})^{-1} = F_{12} \text{ puesto que } F_{12}F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(F_3(k))^{-1} = F_3\left(\frac{1}{k}\right) \text{ puesto que } F_3(k)F_3\left(\frac{1}{k}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(F_{31}(k))^{-1} = F_{31}(-k) \text{ puesto que } F_{31}(k)F_{31}(-k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2.7.1 Ejercicios propuestos

1) Hallar las siguientes matrices elementales de orden 4.

$$F_{24} \qquad F_4(9) \qquad F_{13}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

2) Hallar las siguientes matrices elementales de orden 3.

$$F_2(5) \qquad F_{21}(8)$$

F_{32} $F_2(5)$ $F_{21}(8)$



3) Si

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar $F_{24}A$, $F_4(9)A$, $F_{13}\left(-\frac{1}{3}\right)A$.

4) Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar $F_{32}(1)A$, $F_2(5)A$, $F_{21}(8)A$.

5) Hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices elementales de orden 4.

$$F_{34}\left(\frac{3}{4}\right) \qquad F_{12} \qquad F_3\left(-\frac{2}{3}\right)$$

6) Hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices elementales de orden 3.

$$F_{23}(-6) \qquad F_1(-7) \qquad F_{34}$$

7) Si

$$A = F_{23}(-3) \qquad B = F_1\left(\frac{1}{2}\right) \qquad C = F_{21}$$

son matrices elementales de orden 3. Encontrar:

(a) ABC

(b) $(ABC)^{-1}$

8) Si

$$A = F_{34} \qquad B = F_1\left(-\frac{1}{5}\right) \qquad C = F_{23}$$

son matrices elementales de orden 4. Encontrar:

son matrices elementales de orden 4. Encontrar:



a) ABC

b) $(ABC)^{-1}$

9) Demostrar que si A es no singular y $AB = AC \Longrightarrow B = C$.

Teorema 2.6

Si A es una matriz rectangular de orden $n \times m$, entonces existen matrices elementales fila $F_1, F_2, \ldots F_q$ tales que $(F_q F_{q-1} \ldots F_2 F_1)A = E_A$, donde E_A es una forma escalonada por filas de A.

Ejemplo 2.29

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y su forma escalonada por filas es:

$$E_A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontrar B^{-1} si $BA = E_A$.

En efecto:

Si

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 10 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 5 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3 - 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = E_A$$

Usando matrices elementales:

$$F_{23}F_{13}(-3)F_{12}(-2)F_{13}A = E_A \quad \Longrightarrow \quad B = F_{23}F_{13}(-3)F_{12}(-2)F_{13}$$

$B^{-1} = \ldots$

$B^{-1} = F_{13}F_{12}(2)F_{13}(3)F_{23}$



Nota

Las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la inversa de una matriz se dan en el siguiente teorema.

Teorema 2.7

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Las siguientes propiedades son equivalentes:

1) A es no singular.

2) Existen matrices elementales fila $F_1, F_2, \ldots F_q$ de orden n tales que $(F_q F_{q-1} \ldots F_2 F_1)A = I_n$

3) $A \sim I_n$ (A es equivalente por filas a la matriz I_n).

4) A es un producto de matrices elementales fila.

Demostración.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Puesto que si A es no singular $\Longrightarrow$ existe A^{-1}, aplicamos operaciones elementales fila a la matriz A para reducirla a la matriz identidad I. Traducido a matrices elementales equivale a multiplicar A, sucesivamente por la izquierda, por matrices elementales fila:

$$F_q(\ldots F_3(\underbrace{F_2(\underbrace{F_1 A})})) = I_n$$

Es decir: $$(F_q \ldots F_2 F_1)A = I_n.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Puesto que aplicando un número finito de operaciones elementales fila a la matriz A se ha llegado a construir la matriz identidad $I_n \Longrightarrow A \sim I_n$.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Si $(F_q \ldots F_2 F_1)A = I$ entonces $PA = I$ donde $P = F_q \ldots F_2 F_1$ es un producto de matrices elementales donde cada una de ellas es no singular, por tanto, P^{-1} existe y $A = P^{-1}$.
Es decir $A = F_1^{-1} F_2^{-1} \ldots F_q^{-1}$; luego, A es un producto de matrices elementales fila.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Si A es un producto de matrices elementales entonces A es no singular.

Entonces hemos cerrado el círculo y las cuatro proposiciones son equivalentes.



Nota

Este teorema establece que toda matriz A no singular es un producto de matrices elementales fila. La factorización de A como producto de matrices elementales fila no es única como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.30

Si

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies A \text{ es no singular y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que las siguientes factorizaciones son correctas:

a) $A = F_{12}F_{12}(5)F_{21}(-2)F_2(-1)$

b) $A = F_{21}(4)F_{12}(1)F_{21}(1)$

En efecto:

a)

$$F_{12}F_{12}(5)F_{21}(-2)F_2(-1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

b)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1+4f_2} \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$

2.8 Regla para expresar la inversa de una matriz cuadrada no singular como un producto de matrices elementales fila

Suponiendo que tenemos una matriz cuadrada A no singular, aplicamos una sucesión de operaciones elementales fila $R_1, R_2, \ldots R_q$ que transforman A en la matriz identidad I. Sean $F_1, F_2, \ldots, F_q$ las matrices elementales fila que corresponden a $R_1, R_2, \ldots R_q$ respectivamente. Entonces, $(F_q \ldots F_2 F_1)A = I$ y por tanto: $A^{-1} = F_q \ldots F_2 F_1$ y $A = F_1^{-1} F_2^{-1} \ldots F_q^{-1}$.

Un método para transformar A en I (si A es no singular) y al mismo tiempo encontrar A^{-1} es el siguiente:

1) Formar la matriz $(A|I)$ de orden $n \times (2n)$. Aplicamos las operaciones elementales fila $R_1, R_2, \ldots R_q$ como se indica.

2) $(A|I) \xrightarrow{R_1} (F_1 A|F_1 I) = (F_1 A|F_1)$

3) $(F_1 A|F_1) \xrightarrow{R_2} (F_2 F_1 A|F_2 F_1)$

4) $(F_2 F_1 A|F_2 F_1) \xrightarrow{R_3} (F_3 F_2 F_1 A|F_3 F_2 F_1)$

$\vdots$

$q+1)$

$$\begin{aligned}(F_{q-1} \ldots F_2 F_1 A|F_{q-1} \ldots F_2 F_1) \xrightarrow{R_q} &\Big(\underbrace{F_q \ldots F_2 F_1}_{P} A \Big| \underbrace{F_q \ldots F_2 F_1}_{P}\Big) \\ &= (PA|P) \\ &= (I|A^{-1})\end{aligned}$$

$$PA = I \implies A^{-1} = P \text{ y } A = P^{-1}$$

Nota

1) Si $(A|I) \sim (I\,|A^{-1})$ queda comprobado que la matriz a la derecha de I es la matriz inversa de A.

2) La factorización de una matriz no singular como producto de matrices elementales no es única. La causa de esto es que hay más de una sucesión de operaciones elementales que se puede usar para transformar la matriz en la matriz identidad.

Ejemplo 2.31

Si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Expresar A y A^{-1} como un producto de matrices elementales fila, si es posible.
$|A| = 3 \neq 0 \implies$ existe A^{-1}.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+2f_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1\times f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2+2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2-2f_3]{f_1-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1+2f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right) = (I\,|A^{-1})$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ -5 & -1 & 5\\ 7 & 2 & -4\end{pmatrix}$$

Reconstruyendo mediante matrices elementales la secuencia de las operaciones elementales fila aplicadas tenemos:

$$F_{31}(2)F_{32}(-2)F_{21}(-2)F_3\left(-\frac{1}{3}\right)F_{23}(-3)F_{32}(-1)F_{13}(1)F_{12}(2)F_{12}F_{12}(2)A=I$$

$$PA=I$$

$$A=P^{-1}=F_{12}(-2)F_{12}F_{12}(-2)F_{13}(-1)F_{32}(1)F_{23}(3)F_3(-3)F_{21}(2)\,F_{32}(2)F_{31}(-2)$$

$$A^{-1}=P=F_{31}(2)F_{32}(-2)F_{21}(-2)F_3\left(-\frac{1}{3}\right)F_{23}(-3)F_{32}(-1)F_{13}(1)\,F_{12}(2)F_{12}F_{12}(2)$$

Ejemplo 2.32

Si

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Expresar A como un producto de matrices elementales fila, si es posible.

$|A|=0 \implies$ no existe A^{-1}. Luego no es posible expresar A como un producto de matrices elementales fila, puesto que:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[f_3-3f_1]{f_2+f_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 7 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -7 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+f_2}\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&5&7&1&1&0\\0&0&0&-2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{5}f_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&\frac{7}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&0\\0&0&0&-2&1&1\end{array}\right)$$

entonces

$$A\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&7/5\\0&0&0\end{pmatrix}\neq I$$

por tanto, A es singular y no tiene inversa.

Nota

Para completar la teoría, nos referiremos de manera muy breve a las matrices elementales por columnas.

Definición 2.15

Una matriz **elemental columna** es una matriz cuadrada de orden n que se obtiene de aplicar una sola operación elemental en una columna de I_n.

C_{st} denota la matriz elemental columna obtenida de aplicar la operación elemental $c_s \times c_t$ a la matriz identidad I.

$C_s(k)$; $k \neq 0$ denota la matriz elemental columna obtenida de aplicar a la matriz identidad I la operación elemental kc_s.

$C_{st}(k)$ denota la matriz elemental columna obtenida de aplicar la operación elemental $c_t + kc_s$ a la matriz identidad I.

Ejemplo 2.33

Para la matriz identidad de orden 3:

$$C_{23} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\times c_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$C_1(k) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{kc_1} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad k \neq 0$$

$$C_{12}(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puesto que } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+kc_1} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué efecto produce en una matriz multiplicar por la derecha cada una de las matrices elementales columna?

Veamos:

Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

a)

$$AC_{23} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 8 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Se observa que multiplicar por la derecha de A la matriz C_{23} es equivalente a aplicar la operación elemental $c_2 \times c_3$ directamente en A.

b)

$$AC_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -1 & 7 \\ 3k & 4 & 8 \\ -2k & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad k \neq 0$$

La multiplicación a la derecha de A por $C_1(k)$ es equivalente a aplicar la

operación elemental kc_1 directamente en A.

c)

$$AC_{12}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 8 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+k & 7 \\ 3 & 4+3k & 8 \\ -2 & 2-2k & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

La multiplicación a la derecha de A por $C_{12}(k)$ equivale a aplicar la operación elemental $c_2 + kc_1$ directamente en A.

Las matrices elementales columna son matrices no singulares y por tanto son invertibles como establece el siguiente teorema.

Teorema 2.8

Cada matriz elemental columna de orden n tiene una inversa que es también una matriz elemental del mismo tipo.

1) $(C_{st})^{-1} = C_{st}$

2) $(C_s(k))^{-1} = C_s\left(\frac{1}{k}\right); k \neq 0$

3) $(C_{st}(k))^{-1} = C_{st}(-k)$

Ejemplo 2.34

Hallar $(C_{23})^{-1}$, $(C_1(k))^{-1}$, $(C_{12}(k))^{-1}$

$$(C_{23})^{-1} = C_{23} \text{ puesto que } C_{23}C_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

$$(C_1(k))^{-1} = C_1\left(\frac{1}{k}\right) \text{ puesto que } C_1(k)C_1\left(\frac{1}{k}\right) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$



$$(C_{12}(k))^{-1} = C_{12}(-k) \text{ puesto que } C_{12}(k)C_{12}(-k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Nota

Para efecto de sus aplicaciones, las matrices elementales fila tienen mayor utilidad, por ejemplo en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.8.1 Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.19

a) ¿Para qué valores de α la matriz A tiene inversa?

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha + 3 & \alpha + 8 \end{pmatrix}$$

b) Expresar A^{-1} como un producto de matrices elementales fila.

Solución.

1) $|A| = (1 - 3\alpha)$ entonces A es invertible si $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$

2)

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha + 3 & \alpha + 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1\times f_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 7 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2+\alpha f_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3\alpha-1 & 4\alpha+1 & 1 & \alpha & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3\alpha-1}f_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{4\alpha+1}{3\alpha-1} & \frac{1}{3\alpha-1} & \frac{\alpha}{3\alpha-1} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-\left(\frac{4\alpha+1}{3\alpha-1}\right)f_3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{4\alpha+2}{3\alpha-1} & \frac{9\alpha+2}{3\alpha-1} & \frac{-4\alpha-1}{3\alpha-1}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1-2f_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \frac{-8\alpha-4}{3\alpha-1} & \frac{-15\alpha-5}{3\alpha-1} & \frac{8\alpha+2}{3\alpha-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{4\alpha+2}{3\alpha-1} & \frac{9\alpha+2}{3\alpha-1} & \frac{-4\alpha-1}{3\alpha-1}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1-3f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-7}{3\alpha-1} & \frac{3\alpha-11}{3\alpha-1} & \frac{5-\alpha}{3\alpha-1}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{4\alpha+2}{3\alpha-1} & \frac{9\alpha+2}{3\alpha-1} & \frac{-4\alpha-1}{3\alpha-1}\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1\end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

Reconstruyendo mediante matrices elementales fila la secuencia de las operaciones elementales aplicadas tenemos:

$$F_{32}\left(\frac{-4\alpha-1}{3\alpha-1}\right)F_2\left(\frac{1}{3\alpha-1}\right)F_{13}(-2)F_{12}(\alpha)F_{12}F_{13}(-1)A = I$$
$$F_{31}(-3)F_{21}(-2)$$

$$A^{-1} = F_{31}(-3)F_{21}(-2)F_{32}\left(\frac{-4\alpha-1}{3\alpha-1}\right)F_2\left(\frac{1}{3\alpha-1}\right)F_{13}(-2)$$
$$F_{12}(\alpha)F_{12}F_{13}(-1)$$

CamScanner

Ejercicio 2.20

$M = \text{adj}(ABC)$ es una matriz cuadrada de orden 3, cuyo determinante es 16, donde $A = F_{13}$, $B = F_{32}(-3k)$, $C = F_2(2k)$ y $k < 0$. Si el determinante de la matriz $\alpha M^{-1} + M$ es igual a 144(33). Calcular $\alpha > 0$

Solución.

$$M = \text{adj}(ABC) = \text{adj}(C)\,\text{adj}(B)\,\text{adj}(A)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = F_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |A| = -1$$

$$B = F_{32}(-3k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |B| = 1$$

$$C = F_2(2k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |C| = 2k, \quad k < 0$$

$$\text{adj}(C) = |C|C^{-1} = (2k)F_2\left(\frac{1}{2k}\right) = 2k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(B) = |B|B^{-1} = (1)F_{32}(3k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = |A|A^{-1} = (-1)F_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CamScanner

$$M = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3k & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2k \\ -3k & -1 & 0 \\ -2k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M| = (-2k)(-2k) = 4k^2 = 16 \Longrightarrow k^2 = 4 \Longrightarrow k = \pm 2 \Longrightarrow k = -2 < 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -16 & 24 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha M^{-1} + M = \frac{\alpha}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -16 & 24 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{4} + 4 \\ 6 & -\alpha - 1 & \frac{3\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{4} + 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha M^{-1} + M| = \left(\frac{\alpha}{4} + 4\right) \left[(\alpha + 1) \left(\frac{\alpha}{4} + 4\right) \right]$$

$$= \frac{1}{16} (\alpha + 16)(\alpha + 1)(\alpha + 16) = 144(33)$$

$$(\alpha + 16)^2 (\alpha + 1) = 16(144)(33)$$

$$\alpha = 32$$

Ejercicio 2.21

Sea A una matriz no singular de orden 4, donde

$$A^{-1} = F_{14}(1) F_{13}(1) F_{12}(1) F_{24}(1) F_{34}(1) F_2(y - x) F_3(y - x) F_4(y - x) F_4(-2)$$

$F_{42}(1)F_{43}(1)F_1(x)F_{21}(1)F_{31}(1)F_{41}(1)$



Si $|\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A^{-1}))| = 16^9$ y $x < 0$, $x + y = 0$. Calcular $4A^T - A^{-1}$

Solución.

$$I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1+f_4} \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{xf_1} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+f_4} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2+f_4} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)f_4} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(y-x)f_4} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&-2(y-x) \end{pmatrix} \xrightarrow{(y-x)f_3} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&1&0&1\\0&0&y-x&y-x\\0&0&0&-2(y-x) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(y-x)f_2} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&y-x&0&y-x\\0&0&y-x&y-x\\0&0&0&-2(y-x) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4+f_3} \begin{pmatrix} x&x&x&x\\0&y-x&0&y-x\\0&0&y-x&y-x\\0&0&y-x&-(y-x) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4+f_2}\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & y-x & 0 & y-x \\ 0 & 0 & y-x & y-x \\ 0 & y-x & y-x & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{f_2+f_1}\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & x & y \\ 0 & 0 & y-x & y-x \\ 0 & y-x & y-x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+f_1}\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & x & y \\ x & x & y & y \\ 0 & y-x & y-x & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{f_4+f_1}\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & x & y \\ x & x & y & y \\ x & y & y & x \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & x & y \\ x & x & y & y \\ x & y & y & x \end{pmatrix}$$

$$|A^{-1}|=-2x(y-x)^3$$

$$\mathrm{adj}(A^{-1})=|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}$$

$$\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A^{-1}))=\mathrm{adj}\left(\frac{A}{|A|}\right)=\left|\frac{A}{|A|}\right|\left(\frac{A}{|A|}\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{|A|^n}|A|(|A|A^{-1})=|A|^{2-n}A^{-1}$$

$$|\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A^{-1}))|=||A|^{2-n}A^{-1}|=(|A|^{2-n})^n|A^{-1}|$$

$$=|A|^{2n-n^2-1}=|A^{-1}|^{n^2-2n+1}$$

$$n=4 \implies |A^{-1}|^9=16^9 \implies |A^{-1}|=16$$

$$-2x(y-x)^3=16 \qquad x+y=0 \text{ (dato)}$$

$$-2x(-2x)^3=16$$

$$(2x)^4=16 \Longrightarrow x^4=1 \Longrightarrow x=\pm 1$$

$$x<0 \implies x=-1,\ y=1$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&1\\-1&-1&1&1\\-1&1&1&-1\end{pmatrix}\implies 4A^T-A^{-1}=O$$

Ejercicio 2.22

Si

$$\text{adj}(A)=t^2F_2\left(\frac{1}{t}\right)F_{32}(-t)F_1\left(\frac{1}{t}\right),\ |A|>0 \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&t&t+1\\t&0&-1\\t+1&t&2t+2\end{pmatrix}$$

son matrices tales que $|A^{-1}||A^2+BA|=\text{cof}(A+B)$, $A+B$ es no singular y $C=(c_{ij})$ es otra matriz obtenida a partir de $A+B$ tal que $c_{ij}-c_{ji}=0\ \forall i,j$. Expresar C como un producto de matrices elementales fila.

Solución.

$$|A^{-1}||A^2+BA|=|A^{-1}||(A+B)A|=|A^{-1}||A+B||A|=|A+B| \tag{2.11}$$

$$(\text{cof}(A+B))^T=\text{adj}(A+B)$$

$$|(\text{cof}(A+B))^T|=|\text{adj}(A+B)|=|A+B|^2 \tag{2.12}$$

Igualando (2.11) y (2.12): $|A+B|=|A+B|^2\implies |A+B|=1$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{t}f_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-tf_3}\begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0&0\\0&1&-t\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{t}f_2}\begin{pmatrix}\frac{1}{t}&0&0\\0&\frac{1}{t}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{adj}(A) = t^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & -t^2 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

$$|\operatorname{adj}(A)| = t^4 = |A|^2 \implies |A| = \pm t^2 \implies |A| = t^2 > 0$$

$$\operatorname{adj}(A) = |A|A^{-1} = t^2 F_1\left(\frac{1}{t}\right) F_{32}(-t) F_1\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$\text{entonces } A^{-1} = F_2\left(\frac{1}{t}\right) F_{32}(-t) F_1\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$A = F_1(t) F_{32}(t) F_2(t)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{tf_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 + tf_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{tf_1} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$A + B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & t+1 \\ t & 0 & -1 \\ t+1 & t & 2t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & t & t+1 \\ t & t & t-1 \\ t+1 & t & 2t+3 \end{pmatrix}$$

$$|A+B| = 1 \implies |A+B| = -2t = 1$$

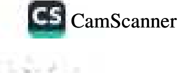
$t = -\frac{1}{2}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \qquad (A+B)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = (A+B) + (A+B)^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+f_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow[f_2\times f_3]{(-1)f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}f_3]{-\frac{1}{3}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2+\frac{5}{3}f_3]{f_1+f_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

$$F_{21}(-1)F_{32}\left(\frac{5}{3}\right)F_{31}(1)F_3\left(-\frac{1}{3}\right)F_2\left(-\frac{1}{3}\right)F_{23}F_1(-1)F_{13}(1)F_{12}(-1)C = I$$

$$C = F_{12}(1)F_{13}(-1)F_1(-1)F_{23}F_2(-3)F_3(-3)F_{31}(-1)F_{32}\left(-\frac{5}{3}\right)F_{21}(1)$$

Ejercicio 2.23

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 1 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ donde } a \neq 0 \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Expresar $M = (I - A)(I + A)^{-1}(I - A)^{-1}(I + A)B$ como un producto de matrices elementales fila.

Solución.

$$\begin{aligned} (I + A)^{-1}(I - A)^{-1} &= ((I - A)(I + A))^{-1} \\ &= (I - A^2)^{-1} \\ &= ((I + A)(I - A))^{-1} \\ &= (I - A)^{+1}(I + A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= (I - A)\underbrace{(I + A)^{-1}(I - A)^{-1}}(I + A)B \\ &= (I - A)(I - A)^{-1}(I + A)^{-1}(I + A)B = B \end{aligned}$$



$$(M|I) = (B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+2f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 11 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+2f_2]{(-1)f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}f_3]{-\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2-2f_3]{f_1+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1-f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{13}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$$

$$M^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & -13 & 3 \\ -4 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{31}(-1)F_{32}(-2)F_{21}(3)F_3\left(\frac{1}{3}\right)F_2\left(-\frac{1}{2}\right)F_{23}(2)F_1(-1)F_{13}(2)F_{12}(-1)F_{13}M = I$$

$$PM = I \Longrightarrow M = P^{-1}$$

$$M = F_{13}F_{12}(1)F_{13}(-2)F_1(-1)F_{23}(-2)F_2(-2)F_3(3)F_{21}(-3)F_{32}(2)F_{31}(1)$$





Ejercicio 2.24

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y}$$

X matriz simétrica de orden 3, tal que: $A(A^TA)^{-1}A^T = XA(A^TA)^{-1}A^TX^{-1}$ y $X = A(A^TA)^{-1}A^TC^{-1}$. Expresar C como un producto de matrices elementales fila.

Solución.

Si $M = A(A^TA)^{-1}A^T \Longrightarrow M^T = (A^T)^T((A^TA)^{-1})^TA^T = A(A^TA)^{-1}A^T$

entonces $M = M^T$

(dato) $\quad M = XMX^{-1}$ y $X = MC^{-1}$

$$\begin{aligned} M^T = (XMX^{-1})^T &= (X^{-1})^TM^TX^T \\ &= (X^T)^{-1}M^TX^T, \quad X = X^T \quad \text{(dato)} \\ &= X^{-1}M^TX \end{aligned}$$

$$M^TX^{-1} = X^{-1}M^T \Longrightarrow MX^{-1} = X^{-1}M$$

(dato) $\quad X = MC^{-1} \Longrightarrow X^{-1} = (MC^{-1})^{-1} = CM^{-1}$

$$\begin{aligned} X^{-1}M = C \Longrightarrow C^T &= (X^{-1}M)^T \\ &= M^T(X^{-1})^T \\ &= M^T(X^T)^{-1} \\ &= M^TX^{-1} = X^{-1}M^T \end{aligned}$$

$$C^T = X^{-1}M^T = X^{-1}M = C$$

Por tanto, C es una matriz simétrica $\Longrightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$(C|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{3})f_2}\begin{pmatrix}1&2&1&1&0&0\\0&1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1-2f_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\\0&1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1-f_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-1\\0&1&0&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)=(I|C^{-1})$$

$$F_{31}(-1)F_{21}(-2)F_2\left(-\frac{1}{3}\right)F_{13}(-1)F_{12}(-2)C=I$$

$$PC=I$$

$$C=F_{12}(2)F_{13}(1)F_2(-3)F_{21}(2)F_{31}(1)$$

Ejercicio 2.25

Sea la matriz

$$C=F_{12}F_3(-1)F_{24}(3)F_{31}(-2)F_{23}\begin{pmatrix}3&-1&3&a&5\\5&-3&a&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&b&4&b\end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b el rango de C tomará su máximo valor y su mínimo valor?

Solución.

$C=BA$ donde $B=F_{12}F_3(-1)F_{24}(3)F_{31}(-2)F_{23}$ y

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&3&a&5\\5&-3&a&3&4\\1&-3&-5&0&-7\\7&-5&b&4&b\end{pmatrix}$$

B es un producto de matrices elementales fila; por tanto, es no singular. Entonces por la propiedad (5) de la Sección 2.2

por la propiedad (3) de la Sección 2.2

Si $|B| \neq 0 \Longrightarrow r(BA) = r(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & a & 5 \\ 5 & -3 & a & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & b & 4 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 5 & -3 & a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & a & 5 \\ 7 & -5 & b & 4 & b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 3 & -1 & 3 & a & 5 \\ 5 & -3 & a & 3 & 4 \\ 7 & -5 & b & 4 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 - 7f_1]{\substack{f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 5f_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 8 & 18 & a & 26 \\ 0 & 12 & a+25 & 3 & 39 \\ 0 & 16 & b+35 & 4 & b+49 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}f_3]{\frac{1}{2}f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & \frac{a}{2} & 13 \\ 0 & 4 & \frac{a+25}{3} & 1 & 13 \\ 0 & 16 & b+35 & 4 & b+49 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4 - 4f_2]{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & \frac{a}{2} & 13 \\ 0 & 0 & \frac{a-2}{3} & 1 - \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & -2a+4 & b-3 \end{pmatrix}$$

Si $a = 2 \Longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 0 & b-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & b-1 & 0 & b-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = 1 \quad \text{o} \quad b = 3$$

Si $a = 2$ y $\begin{cases} b = 1 & \Longrightarrow r(A) = 3 \\ b = 3 & \Longrightarrow r(A) = 3 \end{cases}$

Si $a \neq 2 \Longrightarrow$

$$A \xrightarrow{\left(\frac{1}{a-2}\right) f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & 9 & \frac{a}{2} & 13 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & b-1 & 4-2a & b-3 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow[\frac{1}{4}f_2]{6f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{a}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 4-2a & b-3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{a}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 4-2a & b-3 \end{pmatrix}$$

$$a \neq 2 \text{ y} \begin{cases} b = 1 & \Longrightarrow r(A) = 4 \\ b = 3 & \Longrightarrow r(A) = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{a}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4-2a & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{9}{4} & \frac{a}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-2a & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a = \frac{7}{2}$ y $b = 3 \Longrightarrow r(A) = 3$

Conclusión:

$$r(C) = 4, a \neq 2 \text{ y } b = 1 \text{ ó } b = 3$$

$$r(C) = 3 \begin{cases} a = 2,\ b = 1 \\ a = 2,\ b = 3 \\ a \neq 2,\ b = 3,\ a = \frac{7}{2} \end{cases}$$

2.8.2 Ejercicios propuestos

1) Hallar la inversa de la matriz A, donde I_n es la matriz de identidad de orden n.

$$A = \begin{pmatrix} & & a_1 \\ & & a_2 \\ & I_n & \vdots \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rpta: } A^{-1} = \begin{pmatrix} & & -a_1 \\ & & -a_2 \\ & I_n & \vdots \\ & & -a_n \\ 0\ 0\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^{-1} si es que existe.

3) D.q. si A es una matriz antisimétrica, entonces A^{-1} es antisimétrica.

4) Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix}$$

es no singular. ¿Qué valores debe tener t para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a+bt & at+b & c \\ x+yt & xt+y & z \\ u+vt & ut+v & w \end{pmatrix}$$

tenga inversa?

5) Si

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y & z & x \\ 5 & -z & y \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada con determinante negativo y si

$$\left|\operatorname{adj}\left(-\frac{1}{6}A\right)\right| = \left(\frac{1}{36}\right)^3 \quad \text{y} \quad 2A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Calcular A y A^{-1}.

$$\text{Rpta: } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

6) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

equivalente a la matriz escalonada por filas

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $E = MA$. Hallar M^{-1}

7) Si

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3 y $n \in \mathbb{Z}^+$, calcular A^n y A^{-n}

$$\text{Rpta: } A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}, \quad A^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^n} & \frac{-n}{a^{n+1}} & \frac{n(n+1)}{2a^{n+2}} \\ 0 & \frac{1}{a^n} & \frac{-n}{a^{n+1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^n} \end{pmatrix}$$

8) Si

$$A = \begin{pmatrix} x & z & y \\ 5z & y & 0 \\ 4 & y & x \end{pmatrix}$$

es una matriz con determinante positivo, donde $\left|(\text{adj}(2A)^{-1})^{-1}\right| = 64$. Si

$$5A^{-1} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -75 & \cdot & \cdot \\ 110 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$



Calcular $|A^n|$ y $|A^{n-1}|$.

9) A es una matriz cuadrada con determinante negativo. Si

$$\operatorname{adj}\left(\frac{1}{3}(\operatorname{adj}(-3A))\right) = \begin{pmatrix} -18 & -18 & -27 \\ -9 & 9 & 0 \\ 9 & -18 & -9 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |A^{-1}|^2 = 1$$

a) Calcular A.

b) Expresar A^{-1} como un producto de matrices elementales fila.

Rpta: $a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$b)\ A^{-1} = F_{31}(-1)F_{32}(1)F_{21}(1)F_{23}(-4)F_{23}F_{13}(1)F_{12}(-2)F_{12}$

10) Sea la matriz cuadrada no singular

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a & b & b \\ a & b & a & b \\ a & b & b & a \end{pmatrix}$$

donde a y b son números reales. Si

$$\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{4}|A^T|A \qquad \text{y} \qquad \left|\operatorname{adj}\left(\frac{1}{4}A\right)\right| = \left(-\frac{1}{16}\right)^3$$

Calcular A y A^{-4}.

11) Sea A una matriz de orden $2n+1$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & \dots & a \\ -a & 0 & a & \dots & a \\ -a & -a & 0 & \dots & a \\ \vdots & & & & \\ -a & -a & -a & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar $\operatorname{adj}(A)$.

Rpta: $|A| = 0 \longrightarrow \operatorname{adj}(A)$ no existe

Rpta: $|A| = 0 \Longrightarrow$ adj(A) no existe.



12) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ c & 0 & a \\ a & -b & b \end{pmatrix}$$

donde $0 \leq c < a < b$ son enteros tales que $|A| > 0$ y $|A + A^T| < 0$,

$$-\operatorname{adj}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 4 & \cdot & 2 \\ 8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |\operatorname{adj}(A + A^T)| = 100$$

Calcular $\left(A(A + A^T)\right)^{-1}$.

13) dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 18 & a & b & c \\ 0 & 18 & d & e \\ 0 & 0 & 18 & f \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Si $B = XBX^{-1}$, $X = BA^{-1}$. Hallar X (matriz simétrica).

Rpta: $A = 18I,\ A^{-1} = \dfrac{1}{18}I,\ X = BA^{-1} = \dfrac{1}{18}B$.

14) Sean A, B y C matrices cuadradas de orden 3 donde

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \operatorname{adj}(A^2)\operatorname{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 10 \\ \cdot & \cdot & 24 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Si $(AB)^T + C = 2(B^T + A)$. Calcular C.

15) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de $B(B^5 - I)$.



Rpta: $B = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 26 & 7 & 35 \\ 7 & 74 & -5 \\ 35 & -5 & 50 \end{pmatrix}$, $B^2 = B$, $B^4 = B^2 = B$, $B^5 = B$

$$r(B(B^5 - I)) = r(B(B - I)) = r(B^2 - B) = r(B - B) = 0$$

16) A es una matriz cuadrada de orden 3, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c + d \neq 0$, $a - b \neq 0$,

$$A + A^T = \begin{pmatrix} c & c & d \\ \cdot & c & \cdot \\ \cdot & c & a-b \end{pmatrix}, \qquad A - A^T = \begin{pmatrix} x & a & a \\ \cdot & y & \cdot \\ \cdot & b & z \end{pmatrix},$$

$$\text{adj}(2A) = 4\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ 5 & -18 & 7 \\ (c+d)^x & -3 & (a-b)^y \end{pmatrix}, \qquad |A| > 0$$

Hallar $M = (A + A^T)(A - A^T)$

17) Sean A, B, C y D matrices cuadradas de modo que $ABC = D$, $D = \text{adj}(A)$, $A = \text{adj}(C)$ y $C^2 = 4I$, $|C| < 0$, $a + b = 0$, $b \in \mathbb{Z}_0^+$ y

$$C = \begin{pmatrix} b^2 & b & b & b \\ b & 1 & a & a \\ b & a & 1 & a \\ b & a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Expresar $\left(-\frac{1}{16}\right) B$ como un producto de matrices elementales fila.

Rpta:

$$B = |C|C = -16\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left(-\frac{1}{16}\right) B = F_{12}(1)F_{13}(1)F_{14}(1)F_2(-2)F_3(-2)F_4(-2)F_{24}F_{23}(1)F_3(-1)$$
$$F_{34}(1)F_4(2)F_{21}(1)F_{32}(1)F_{43}(-1)F_{41}(1)F_{42}(1)$$

18) Sea

$$\begin{pmatrix} a & -1 & b \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 2b \\ 1 & c & b \end{pmatrix}.$$

una matriz donde $|A| > 0$, $a > 0$,

$$\left|\text{adj}\left(\frac{1}{3}A\right)\right| = \frac{1}{9} \quad , \quad \text{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} -27 & \cdot & 19 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Hallar $(A + A^T)^{-1}$.

19) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ -1 & a & a \\ b & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz cuadrada de orden 3, con determinante positivo, tal que a y b son enteros no negativos donde

$$\text{adj}(AA^T) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Calcular A y A^{-1}.

Rpta: $a = 1,\ b = 0,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

20) Sea la matriz no singular

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2x+1 & x+1 \\ 2x & 2x-1 & x-1 \\ 2x+1 & 3x+1 & 2x+3 \end{pmatrix}$$

tal que $10|4A| = |\text{adj}(2A)|$. Expresar la adj$(A)$ como un producto de matrices elementales fila.

21) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(A^T) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ b & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(A^{\cdot}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 2a \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

donde $|A| > 0$, $a > 0$, si $\alpha^3 = \dfrac{1}{7}$ y $|\,\text{adj}(\alpha A)| = 16$. Calcular $\text{adj}(AA^T)$.

$$\textbf{Rpta: } a = 3,\ b = 4 \quad \text{adj}(AA^T) = \begin{pmatrix} 98 & -12 & -52 \\ -12 & 173 & 31 \\ -52 & 31 & 69 \end{pmatrix}$$

22) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}$$

donde $a \leq 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$. En la matriz de cofactores de A, el elemento $A_{34} = 1$, $|\,\text{adj}(bA)| = -8^5$. Calcular $\text{adj}(A)$.

23) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 4 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 4 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$$

Calcular A^{-1} para aquellos casos en que A^{-1} existe.

$$\textbf{Rpta: } |A| = (x^2-4)^2 \neq 0 \text{ si } x \neq \pm 2, \quad A^{-1} = \frac{1}{4-x^2}\begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

24) A es una matriz simétrica donde

$$\text{adj}(-\,\text{adj}(A)) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & c \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \cdot & 4 & 5 \\ \cdot & \cdot & 6 \end{pmatrix}$$

Calcular $M = A + A^{-1}$.

25) Sean las matrices

$$\begin{pmatrix} 4 & b & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & c & c \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ c & a & c \\ c & c & a \end{pmatrix},$$

$a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$ donde $|A|>0,\ |B|>0,$

$$\operatorname{adj}(B)=\begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 2 & 0 & \cdot \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj}(BA)=\begin{pmatrix} -2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -4 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Calcular $M=A^{-1}B^{-1}$

Rpta: $a=-1,\ b=2,\ c=1, \quad M=A^{-1}B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

26) A es una matriz cuadrada de orden 3 donde a y b son enteros,

$$A=\begin{pmatrix} a & b & a \\ -2 & 0 & a \\ b & -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj}(A+A^T)=\begin{pmatrix} -25 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Determine $M=A^{-1}+(A^T)^{-1}$.

27) Sean A, B y

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

matrices no singulares tales que $ACB=|A|B$ donde $|A|>0$. Hallar A y A^{-1}.

Rpta: $a=1,\ b=-1, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \\ -12 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

28) A es una matriz antisimétrica de orden 4, con determinante positivo donde

$$\frac{1}{3}\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix} a & -x & -3 & \cdot \\ \cdot & b & \cdot & -3 \\ \cdot & -4 & c & \cdot \\ -2 & \cdot & -2 & d \end{pmatrix}, \ x<0 \quad \text{y} \quad \left|\operatorname{adj}\left(\operatorname{adj}\left(\frac{1}{3}A\right)\right)\right|=\left(\frac{1}{9}\right)^9$$

Calcular $M = 2A + A^T$.



29) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & -4 & 5 \\ b & -3 & c \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ donde } |A| < 0,$$

$$\left|\operatorname{adj}\left(\frac{2}{3}A^{-1}\right)\right| = \frac{64}{729} \quad , \quad \operatorname{adj}(A^T)\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \cdot & -325 & 124 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$AA^T = (a_{ij})_3$ donde $a_{13} = 24$. Calcular $M = A + A^{-1}$

Rpta:

$$a = 3,\ b = 2, c = 1, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -5 & 25 & -6 \\ -3 & 15 & -6 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

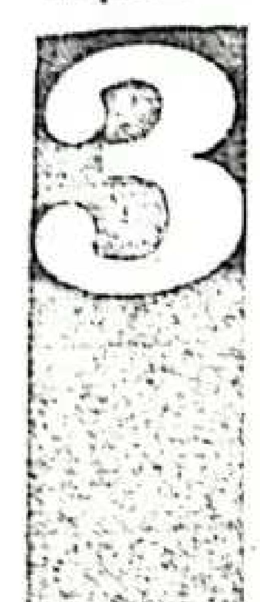
30) Dadas las matrices:

$$A^{-1} = F_2\left(\frac{1}{a}\right)F_{12}(-2)F_{31}(-3)F_{12}(-\alpha)F_{21}(\alpha) \quad \text{donde} \quad |A| = 1 \quad \text{y}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2b+3 & -b+1 & -b-1 \\ 3b-3 & -2b & -3b-2 \\ b+2 & -1 & -2b-1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valor o valores de b, la matriz $A + B$ tiene rango 3, 2, 1?

Capítulo



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una de las aplicaciones más importantes de las matrices es el tratamiento de ecuaciones lineales algebraicas.

Los métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales (SEL) tienen mucha presencia en numerosos problemas aplicados de la economía, de la empresa y de otras ciencias afines.

Una recta en el plano XY se representa algebraicamente mediante una ecuación de la forma

$$a_1x + a_2y = b$$

A una ecuación de esta clase se le llama **ecuación lineal** en las variables x e y.

Definición 3.1

Una ecuación de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son números reales y no todos los coeficientes a_i son iguales a cero, se llama **ecuación lineal en las variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Ejemplo 3.1

Son ecuaciones lineales:

$$5x - 3y = 15 \qquad \text{(ecuación lineal en dos variables)}$$

$$x + 2y - z = 0 \qquad \text{(ecuación lineal en tres variables)}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -1 \qquad \text{(ecuación lineal en } n \text{ variables)}$$





Nota

Es preciso observar que en una ecuación lineal las variables o incógnitas están elevadas a la primera potencia, únicamente, y no aparecen como productos, potencias, raíces, así como argumentos de funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Ejemplo 3.2

No son ecuaciones lineales:

$$x + xy - z = 0$$

$$x^2 + y^2 - x + 3y = 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 8$$

$$y - \operatorname{sen} x = 2$$

$$\ln(3x) - 5\ln y = 1$$

$$e^{x+y} = 9$$

Definición 3.2

Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ es una **solución** de la ecuación lineal $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ si al sustituir $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ satisface la ecuación.

El conjunto $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ se llama **conjunto solución**.

Ejemplo 3.3

En la ecuación lineal $5x - 3y = 15$

- Una solución

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = -5 \text{ puesto que } 5(0) - 3(-5) = 15$$

- Otra solución

$$\text{Si } x = 6 \Rightarrow y = 5 \text{ puesto que } 5(6) - 3(5) = 15$$



Nota

1) El conjunto solución de esta ecuación se obtiene haciendo una de las variables igual a un valor arbitrario llamado también parámetro y despejando la otra variable. Veamos en el ejemplo anterior:

$$\text{Si } x = t \Rightarrow y = \frac{5}{3}(t-3)$$

$$\text{Conjunto solución : } \quad S = \{t, \frac{5}{3}(t-3)\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Observamos que el conjunto solución tiene infinitas soluciones dependiendo del valor que tome el parámetro t.

Una solución particular se obtiene haciendo que t adquiera valores específicos.

2) Otra forma de encontrar el conjunto solución consiste en hacer y igual a un parámetro r y despejar x. Es decir

$$\text{Si } y = r \Rightarrow x = \frac{3}{5}(5+r)$$

$$\text{Conjunto solución : } \quad S = \{\frac{3}{5}(5+r), r\} \quad r \in \mathbb{R}$$

Las dos expresiones describen el mismo conjunto solución.

Ejemplo 3.4

En la ecuación lineal $2x - 3y + z = 4$, el conjunto solución se obtiene haciendo dos de las variables iguales a parámetros distintos y despejando, luego, la tercera variable.

Es decir, si $x = t$, $y = r$, entonces $z = 4 - 2t + 3r$, entonces el conjunto solución $S = \{t, r, 4 - 2t + 3r\}$ $\quad r, t \in \mathbb{R}$ depende de dos parámetros (infinitas soluciones).

Definición 3.3

Un sistema de ecuaciones lineales (SEL) en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es un

conjunto finito de ecuaciones lineales en dichas variables.

Definición 3.[illegible]

Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ es **solución del sistema de ecuaciones lineales** si al sustituir $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ satisface todas las ecuaciones del sistema.
El conjunto $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ se llama **conjunto solución del sistema.**

Ejemplo 3.5

Sea el sistema de dos ecuaciones con tres variables o incógnitas

$$\begin{cases} x - 3y + z = -6 \\ 2x + y - 5z = 9 \end{cases}$$

$S = \{1, 2, -1\}$ es conjunto solución del sistema puesto que al sustituir $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$ satisface las dos ecuaciones lineales.
Mientras que $\{-3, 2, 3\}$ no es conjunto solución del sistema puesto que satisface la primera ecuación y no satisface la segunda ecuación.

Nota

No todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen soluciones. Por ejemplo

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

Es evidente que

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

las ecuaciones se contradicen entre sí, y el sistema no tiene solución.

Definición 3.[illegible]

Cuando un sistema de ecuaciones lineales tiene al menos una solución se llama **consistente o compatible.** Un sistema que no tiene solución se llama **inconsistente o incompatible.**

tente o incompatible.



Nota

Todo sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, o tiene infinitas soluciones, o no tiene solución.

Definición 3.6

Para cualquier sistema de m ecuaciones lineales con n variables o incógnitas de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

se puede usar la notación matricial compacta $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})_{m\times n}$ se llama matriz de coeficientes del sistema, $X_{n\times 1}$ es el vector columna de las variables o incógnitas y $B_{m\times 1}$ es el vector columna de los **términos independientes** del sistema.

Nota

Otra matriz que cumple un rol muy importante en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales es la matriz aumentada.

Definición 3.7

Sea el sistema de m ecuaciones lineales con n variables o incógnitas $AX = B$, la **matriz aumentada** o **matriz ampliada** que se forma al agregar $b_1,\ b_2,\ldots,b_m$ como última columna a la matriz de coeficientes A, se denota por $(A|B)$.

Es decir, la matriz aumentada tiene la siguiente forma:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_n \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Nota

1) Si el orden de la matriz de coeficientes A es $m \times n$, entonces, el orden de la matriz aumentada $(A|B)$ es $m \times (n+1)$.

2) $r(A) \leq r(A|B) \leq r(A)+1$, es decir

$$r(A|B) = \begin{cases} r(A) \\ r(A)+1 \end{cases}$$

Para explicar esta segunda parte

a) Si $A_{m \times n}$ donde $m \leq n$ puede darse el caso que $r(A|B) = r(A)$.

b) Si $A_{m \times n}$ donde $m > n$ puede darse el caso que $r(A|B) = r(A)+1$, es decir, el $r(A|B)$ se modificará con respecto al $r(A)$ a lo más en 1.

Definición 3.8

Dos sistemas de ecuaciones lineales $A_1X = B_1$ y $A_2X = B_2$ son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Se denota por $A_1X = B_1 \sim A_2X = B_2$. El signo $\sim$ se lee "equivalente a".

Ejemplo 3.6

Sean los sistemas de ecuaciones lineales

$$A_1X = B_1 \begin{cases} 5x + 7y = -11 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad A_2X = B_2 \begin{cases} 5x + 7y = -11 \\ y = -3 \end{cases}$$





Averiguar si son sistemas equivalentes

Solución.

En efecto, en el sistema $A_2X = B_2$ para $y = -3$, $x = \frac{1}{5}(-11 - 7y) = 2$ entonces $S = \{2, -3\}$ es conjunto solución de dicho sistema.

Veamos si S es conjunto solución del sistema $A_1X = B_1$: al reemplazar $5(2) + 7(-3) = -11$ y $2(2) + (-3) = 1$ satisface ambas ecuaciones. Por lo tanto, $S = \{2, -3\}$ es conjunto solución de ambos sistemas.

Afirmamos que $A_1X = B_1 \sim A_2X = B_2$ porque ambos sistemas tienen la misma solución.

Propiedades

1) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si y solo si sus respectivas matrices aumentadas son equivalentes. Es decir,

$$A_1X = B_1 \sim A_2X = B_2 \iff (A_1|B_1) \sim (A_2|B_2)$$

2) Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ donde su matriz aumentada es $(A|B)$ y sea $(E_A|E_B)$ la forma escalonada de $(A|B)$, entonces los sistemas $AX = B$ y $E_AX = E_B$ son equivalentes, es decir tienen las mismas soluciones

Nota

Estas propiedades nos están indicando cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales y; por tanto, permiten establecer la siguiente regla:

> Para encontrar el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es suficiente:
>
> 1) Escribir la matriz aumentada $(A|B)$ del sistema.
>
> 2) Hallar la forma escalonada $(E_A|E_B)$ de la matriz $(A|B)$.

3) Resolver el sistema $E_A X = E_B$



Ejemplo 3.7

Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$AX = B \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ x + 3y - 5z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 4 \\ -2x + 7y - 3z = -5 \end{cases}$$

Solución.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -5 & 9 \\ 5 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & 4 \\ -2 & 7 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4+2f_1]{f_2-3f_1,\ f_3-5f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & -10 & 17 & -24 \\ 0 & -17 & 29 & -41 \\ 0 & 13 & -13 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{13}f_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & -10 & 17 & -24 \\ 0 & -17 & 29 & -41 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -17 & 29 & -41 \\ 0 & -10 & 17 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4+10f_2]{f_3+17f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{12}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4-7f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

Este resultado corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 9 \end{cases}$$

$$E_AX = E_B \begin{cases} \quad y - z = 1 \\ \quad z = -2 \end{cases}$$



Resolviendo el sistema, de retroceso por sustitución:

$$z = -2,$$
$$y = z + 1 = -1$$
$$x = -3y + 5z + 9 = -3(-1) + 5(-2) + 9 = 2$$

Luego, el conjunto solución de $E_AX = E_B$ es $S = \{2, -1, -2\}$ que es desde luego la solución de $AX = B$.

Nota

1) Observamos que el método para resolver un sistema de ecuaciones lineales consiste en reemplazar el sistema dado por un nuevo sistema que tenga el mismo conjunto solución y que sea más fácil de resolver. El procedimiento se llama **método de eliminación** o **reducción de Gauss**[1].

2) $(A|B)$ y $(E_A|E_B)$ son matrices equivalentes por filas puesto que las operaciones sobre las filas de la matriz corresponden a las operaciones sobre las ecuaciones del sistema, preservando la posición de las variables o incógnitas, así como de los términos independientes del sistema.

3) Es necesario observar que las operaciones se realizan en secuencia y no simultáneamente.

4) En el ejemplo anterior se puede hacer la solución más evidente, si seguimos aplicando unas cuantas operaciones adicionales en las filas de $(E_A|E_B)$.

$$(E_A|E_B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2+f_3]{f_1-3f_2} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+2f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \ldots \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz resultante se llama forma escalonada reducida de la matriz $(A|B)$ y por simple inspección $x = 2,\ y = -1,\ z = -2$, luego el conjunto solución es $\{2, -1, 2\}$. Este procedimiento se llama **método de eliminación** o **reducción de Gauss-Jordan**[2].

Definición 3.9

La **matriz escalonada reducida por filas** es la matriz escalonada por filas que cumple, además, la siguiente propiedad:

> Todas las columnas, que contienen el primer elemento diferente de cero en cada fila no nula, tienen ceros en todas las posiciones restantes.

Ejemplo 3.8

Matrices escalonadas por filas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices escalonadas reducidas por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota

1) Una matriz puede ser reducida por filas a dos o más formas escalonadas diferentes. Sin embargo, toda matriz puede ser reducida por filas a una y solo una forma escalonada reducida por filas.

[1] Carl Friedrich Gauss, matemático alemán (1777-1855)
[2] Wilhelm Jordan, ingeniero alemán (1844–1899)





Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_A$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_A$

Son las formas escalonadas por filas de A

$$\text{en a)}: \qquad E_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{en b)}: \qquad E_A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 - 4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La forma escalonada reducida por filas es única.

2) Si bien no hay necesidad de sustitución de retroceso en el método de eliminación de Gauss-Jordan, se requiere mayores cálculos para reducir la matriz a la forma escalonada reducida por filas. Por tanto, en adelante usaremos el método de eliminación de Gauss para resolver SEL.

3.1 Existencia y unicidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Además de los métodos para calcular soluciones explícitas de un sistema de ecuaciones lineales, es útil hacernos las siguientes preguntas:

1) ¿Cuándo existen soluciones? (existencia)

2) ¿Si existe solución, es única? (Unicidad)



Los siguientes teoremas responden a estas preguntas:

Teorema 3.1

Un sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ es **consistente o compatible** si y solo si $r(A) = r(A|B)$.
Es decir, si $r(A) \neq r(A|B)$, entonces el sistema no tiene solución; por tanto, es inconsistente o incompatible.

Ejemplo 3.10

¿El sistema

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

es consistente?

Solución.
Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 7 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{21}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$= (E_A|E_B)$$

$$r(A) = 1 \text{ y } r(A|B) = 2 \Longrightarrow r(A) \neq r(A|B)$$

luego el sistema es inconsistente. Observamos que las ecuaciones por simple inspección se contradicen, como se concluyó en la nota del Ejemplo 3.5.

Ejemplo 3.11

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando el método de eliminación de Gauss

$$AX = B \begin{cases} x + 2y + 4z = 2 \\ 2x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

$$3x - y + 5z = 4$$





Solución.

El sistema tiene 3 ecuaciones con 3 variables, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-3f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+7f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2,\ r(A|B) = 3,\ r(A) \neq r(A|B)$ entonces el sistema es inconsistente.

En la última fila se tiene que $0 = 1$, resultado falso independientemente de quienes son $x,\ y$ y z.

Teorema 3.2

Un sistema $AX = B$ de m ecuaciones lineales con n variables o incógnitas ($n \leq m$) tiene solución única si y sólo si $r(A) = r(A|B) = n$.

Ejemplo 3.12

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$AX = B \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ 2x + 5y - 2z = 6 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Solución.

El sistema tiene 4 ecuaciones y 3 incógnitas, luego $n = 3$, usando el método de eliminación de Gauss

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4-f_1]{f_2-3f_1,\ f_3-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -7 & -1 \\ 0 & 11 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$





$$\xrightarrow{f_2-f_3}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 11 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-3f_4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)f_2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow[f_4-4f_2]{f_3+f_2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{7}f_4]{\frac{1}{4}f_3}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{f_4-f_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$ (número de incógnitas) entonces el SEL tiene solución única, por sustitución de retroceso

$$z = 3$$

$$y = -z + 5 = 2$$

$$x = 3y - 2z + 1 = 1$$

entonces $S = \{1, 2, 3\}$



Calcular la solución del sistema

$$AX = B\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 3x + y - 3z = 21 \\ -5x + 2y + z = -23 \end{cases}$$

Solución.

Usando el método de eliminación de Gauss

El sistema tiene 3 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces $n = 3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 21 \\ -5 & 2 & 1 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 21 \\ -2 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+2f_1]{f_2-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 10 & -9 & 27 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+3f_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+3f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$ (número de incógnitas), entonces el sistema tiene solución única por sustitución de retroceso

$$z = -3$$

$$y = 3z + 9 = -9 + 9 = 0$$

$$x = 3y - 2z - 2 = 6 - 2 = 4$$

$S = \{4, 0, -3\}$

Teorema [illegible]

Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Si $r(A) = r(A|B) = r < n$, entonces existen $n - r$ incógnitas arbitrarias o parámetros, es decir, infinitas soluciones.

Ejemplo 3.14

Calcular la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$AX = B \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 9z = 8 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$$

Solución.

Es un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces $n = 3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 9 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)f_2]{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$
$$y = 3z + 4 = 3t + 4$$
$$x = -2y - 3z + 6 = -2(3t + 4) - 3t + 6 = -9t - 2$$

$S = \{-9t - 2, 3t + 4, t\}$ $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Ejemplo 3.15

Calcular la solución del siguiente SEL

$$AX = B \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

Solución.

El sistema tiene 4 ecuaciones con 4 incógnitas, entonces $n = 4$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & -1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4-f_1]{f_2-f_1,\ f_3-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)f_2]{f_3-f_2,\ f_4-3f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existen $n - 2 = 2$ incógnitas arbitrarias

$x_4 = t$

$x_3 = r$

$x_2 = -x_3 + x_4 - 3 = -r + t - 3$

$x_1 = -2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2 = -2(-r + t - 3) - 4r + t + 2 = -2r - t + 8$

$S = \{-2r - t + 8, -r + t - 3, r, t\}$ $r, t \in \mathbb{R}$. Infinitas soluciones que dependen de dos parámetros

Ejemplo 3.16

Resolver el siguiente SEL

$$AX = B \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ y + 4z = -1 \\ 2x - 3y + 10z = 3 \\ x + y + 15z = -1 \end{cases}$$



Solución.

El sistema tiene 4 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces $n = 3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 10 & 3 \\ 1 & 1 & 15 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4-2f_1]{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_4-3f_2]{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$
$$y = -4z - 1 = -4t - 1$$
$$x = 2y - 3z + 2 = -8t - 2 - 3t + 2 = -11t$$

$S = \{-11t, -4t-1, t\}\ t \in \mathbb{R}$. Infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Teorema 3.4

Un sistema consistente de m ecuaciones lineales y n variables donde $m < n$ tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 3.17

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$AX = B \begin{cases} x_1 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 7 \\ 4x_2 + 13x_3 + 22x_4 - 9x_5 = 31 \end{cases}$$

CamScanner

Solución.

Usando el método de eliminación de Gauss. El sistema tiene 3 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces $n = 3$.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & 13 & 22 & -9 & 31 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-4f_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n$ entonces existen $n - 3 = 2$ incógnitas arbitrarias

$x_4 = t$

$x_5 = r$

$x_3 = -2x_4 + x_5 + 3 = -2t + r + 3$

$x_2 = -3x_3 - 5x_4 + 2x_5 + 7 = -3(-2t + r + 3) - 5t + 2r + 7 = t - r - 2$

$x_1 = 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 - 2 = 2(-2t + r + 3) + 4t - 2r - 2 = 4$

$S = \{4, t - r - 2, -2t + r + 3, t, r\}$, $t, r \in \mathbb{R}$. Infinitas soluciones que dependen de dos parámetros.

Nota

1) El Teorema 3.4 es un caso particular del Teorema 3.3.

2) Si en un sistema de ecuaciones lineales se tiene más incógnitas que ecuaciones, es obvio que el rango de la matriz aumentada nunca será igual al número de incógnitas, entonces se tendrá infinitas soluciones, si el sistema es consistente.



Ejercicio 3.1

Para qué valor o valores de a, el siguiente sistema de ecuaciones

$$AX = B \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ 5x - 8y + (a^2 - 2)z = a \end{cases}$$

tiene

1) Exactamente una solución.

2) Infinitas soluciones.

3) Ninguna solución.

Solución.

1) Observamos que la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada, luego $r(A) = 3 = n$ (número de incógnitas) si y sólo si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & -8 & a^2-2 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-5f_1]{f_2-2f_1} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 7 & a^2-7 \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow{f_3-f_2} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}$$

$$= 7(a^2 - 4) \neq 0 \Longleftrightarrow a^2 - 4 \neq 0$$

$AX = B$ tiene solución única si y solo si $a \in \mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Calculamos la solución única

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & (a^2-2) & a \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-5f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & a^2-7 & a-5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{7}f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right)$$



Si $a^2-4 \neq 0$ entonces

$$(A|B) \xrightarrow{(\frac{1}{a^2-4})f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$$z = \frac{1}{a+2}$$
$$y = \frac{3}{7}z - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}\left(\frac{1}{a+2}\right) - \frac{3}{7} = \frac{-3(a+1)}{7(a+2)}$$
$$x = 3y - z + 1 = 3\left(\frac{-3(a+1)}{7(a+2)}\right) - \frac{1}{a+2} + 1 = \frac{-2(a+7)}{7(a+2)}$$

$S = \{\frac{-2(a+7)}{7(a+2)}, \frac{-3(a+1)}{7(a+2)}, \frac{1}{a+2}\},\ a \neq \pm 2$

2) Para determinar las otras soluciones, consideramos $|A| = 0$

$$|A| = 0 \Rightarrow 7(a^2-4) = 0 \Rightarrow (a-2)(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = 2 \text{ o } a = -2$$

Si $a = 2$ entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-5f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{7}f_2]{f_3-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n-2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$
$$y = \frac{3}{7}z - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}t - \frac{3}{7}$$
$$x = 3y - z + 1 = \frac{2}{7}(t-1)$$

$S = \{\frac{2}{7}(t-1), \frac{3}{7}(t-1), t\}$ $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.



3) Si $a = -2$ entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -8 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-5f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}f_3]{f_3-f_2,\ \frac{1}{7}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/7 & -3/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$ entonces $r(A) \neq r(A|B)$. Luego, el sistema es inconsistente para $a = -2$

Ejercicio 3.2

El siguiente sistema de ecuaciones lineales, ¿para qué valores de a, b y c tiene infinitas soluciones?

$$AX = B \begin{cases} 3x + 2y - 4z = a \\ -4x + y - z = b \\ 7x + 12y - 22z = c \end{cases}$$

Solución.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & a \\ -4 & 1 & -1 & b \\ 7 & 12 & -22 & c \end{array}\right) \xrightarrow{f_3+f_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & a \\ -4 & 1 & -1 & b \\ 3 & 13 & -23 & b+c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & a \\ -4 & 1 & -1 & b \\ 0 & 11 & -19 & b+c-a \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+f_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 & a \\ -1 & 3 & -5 & a+b \\ 0 & 11 & -19 & b+c-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1)f_1]{f_1\times f_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -a-b\\ 3 & 2 & -4 & a\\ 0 & 11 & -19 & b+c-a\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-3f_1}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -a-b\\ 0 & 11 & -19 & 4a+3b\\ 0 & 11 & -19 & b+c-a\end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 5 & -a-b\\ 0 & 11 & -19 & 4a+3b\\ 0 & 0 & 0 & c-5a-2b\end{pmatrix}\xrightarrow{(\frac{1}{11})f_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 5 & -a-b\\ 0 & 1 & -\frac{19}{11} & \frac{4a+3b}{11}\\ 0 & 0 & 0 & c-5a-2b\end{array}\right)$$
$$=(E_A|E_B)$$

$$r(A)=r(A|B)=2<n\Longleftrightarrow c-5a-2b=0\Longleftrightarrow c=5a+2b$$

entonces existe $n-2=1$ incógnita arbitraria.
Conjunto solución $S=\{\frac{2}{11}t+\frac{a-2b}{11},\frac{19}{11}t+\frac{4a+3b}{11},t\}$, $t\in\mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Ejercicio 3.3

Un restaurante tiene 45 mesas, x mesas con 2 asientos cada una, y mesas con 4 asientos cada una y z mesas con 8 asientos cada una. La capacidad de asientos del restaurante es de 188. Durante una cena se ocuparon un tercio de las x mesas, dos quintos de las y mesas y un cuarto de las z mesas para un total de 16 mesas. ¿Cuántas mesas de cada tipo se usaron esa noche?

Solución.

De los datos se construye el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$AX=B\begin{cases}x+y+z=45\\ 2x+4y+8z=188\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y+\frac{1}{4}z=16\end{cases}$$

y de modo más simple

$$\begin{cases}x+y+z=45\\ 2x+4y+8z=188\\ 20x+24y+15z=960\end{cases}$$

Resolvemos el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces $n=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 45\\ \end{array}\right)\xrightarrow{f_2-2f_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 45\end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & 188 \\ 20 & 24 & 15 & 960 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-20f_1]{f_2-2f_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 6 & 98 \\ 0 & 4 & -5 & 60 \end{array}\right)$$



$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 2 & 6 & 98 \\ 0 & 0 & -17 & -136 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_2,\ -\frac{1}{17}f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & 3 & 49 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$
$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$ entonces el SEL tiene solución única

$$z = 8$$
$$y = -3z + 49 = 25$$
$$x = -y - z + 45 = -25 - 8 + 45 = 12$$

$S = \{12, 25, 8\}$

Por tanto, el restaurante tiene 12 mesas con 2 asientos cada una, 25 mesas con 4 asientos cada una y 8 mesas con 8 asientos cada una.

Durante la cena se ocuparon 4 mesas de 2 asientos, 10 mesas de 4 asientos y 2 mesas de 8 asientos cada una, en total 16 mesas.

Ejercicio 3.1

Se compró 38 unidades de lapiceros por un total de S/ 84.10. Si el lapicero del tipo A cuesta S/ 4.80, el de tipo B, S/ 2.50 y el de tipo C, S/ 1.20 por unidad. ¿Cuántos lapiceros de cada tipo se compró?

Solución.

Construimos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$AX = B \begin{cases} x + y + z = 38 \\ 4.80x + 2.50y + 1.20z = 84.10 \end{cases}$$

que se reduce a

$$\begin{cases} x + y + z = 38 \\ 48x + 25y + 12z = 841 \end{cases}$$

El sistema tiene 2 ecuaciones con 3 incógnitas, entonces $n = 3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 48 & 25 & 12 & 841 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2-48f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 0 & -23 & -36 & -983 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{23})f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 0 & 1 & \frac{36}{23} & \frac{983}{23} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$
$$y = -\frac{36}{23}z + \frac{983}{23} = -\frac{36}{23}t + \frac{983}{23}$$
$$x = -y - z + 38 = \frac{36}{23}t - \frac{983}{23} - t + 38 = \frac{13}{23}t - \frac{109}{23}$$

$S = \{\frac{13}{23}t - \frac{109}{23}, -\frac{36}{23}t + \frac{983}{23}, t\}$ $t \in \mathbb{R}$. Infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Elegimos un valor de t, de modo que el conjunto solución contenga números enteros y positivos.

Si $t = 19,\ z = 19,\ y = 13,\ x = 6$

Luego se compró 6 lapiceros del tipo A, 13 lapiceros del tipo B y 19 lapiceros del tipo C, en total 38 lapiceros.

Ejercicio 3.5

Cada semana un comerciante mayorista recibe cuatro variedades de cereales x, y, z, w por un total de 120 kilos. Esta semana puede vender las variedades x e y a razón de S/ 3.00 cada kilo, la variedad z a S/ 4.00 y la variedad w a S/ 6.00 cada kilo y desea que sus ingresos sean de S/ 410.00. Para la siguiente semana tiene pedidos de x e y a S/ 2.00 cada kilo, z a S/ 3.00 y w a S/ 5.00 por kilo y desea que sus ingresos sean de S/ 300.00. ¿Cuántos kilos de cada variedad de cereales debe pedir, si compra el mismo número de cada variedad ambas semanas?

Solución.

Se construye el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y + z + w = 120 \end{cases}$$

$$AX = B \begin{cases} 3x + 3y + 4z + 6w = 410 \\ 2x + 2y + 3z + 5w = 300 \end{cases}$$



Es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, entonces $n = 4$. Usando el método de eliminación de Gauss

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 120 \\ 3 & 3 & 4 & 6 & 410 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 300 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2$ y $r(A|B) = 3$ el sistema es inconsistente. Este resultado significa que es imposible satisfacer las condiciones que ha impuesto el comerciante.

3.2 Regla de Cramer para obtener la solución única

Existe una fórmula para calcular la solución única de un sistema consistente de n ecuaciones con n variables o incógnitas, sin tener que resolver el sistema por el método de eliminación de Gauss. La fórmula se llama Regla de Cramer[3] y tiene sustento en lo siguiente:

Consideremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $AX = B$. Supongamos que $r(A) = n$; por tanto, $|A| \neq 0$, entonces existe A^{-1}, luego $X = A^{-1}B$.

La solución es solo una ya que A^{-1} es única.

El siguiente teorema establece la regla de Cramer.



Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas tal que

[3]Gabriel Cramer, matemático suizo (1704–1752)

$|A| \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única. Esta solución es

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

donde A_j es la matriz que se obtiene al reemplazar los elementos de la j-ésima columna de A por los elementos de la matriz B, donde $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$.

Demostración. Si $|A| \neq 0$ entonces A es invertible, es decir existe A^{-1}. En la ecuación

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

entonces

$$X = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)B = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces la j-ésima fila de X tiene la forma

$$x_j = \frac{1}{|A|}(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj}) \tag{3.1}$$

Por otro lado, sea

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notamos que A_j se diferencia de A únicamente en la columna j y además los cofactores de los elementos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ de A_j son iguales a los cofactores de los elementos correspondientes en la j-ésima columna de A.

Por lo tanto, si se fija la columna j, el desarrollo del determinante por cofactores de A_j está dado por

$$|A_j| = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj} \tag{3.2}$$

Sustituyendo (3.2) en (3.1)

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

◇

Ejemplo 3.18

Usando la regla de Cramer, calcular la solución única del siguiente SEL

$$AX = B \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -3 \\ -x + y + 4z = 2 \end{cases}$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} ① & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2-2f_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} ① & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2+3f_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -14 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 90 - 42 = 48$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} ① & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2-2f_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} ① & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3+f_1]{f_2-2f_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{48}{-4} = -12$$
$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{-4} = 2$$
$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{12}{-4} = -3$$

Nota

Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la regla de Cramer, es necesario calcular $n+1$ determinantes de orden n. Para matrices de orden $n > 3$, es mejor utilizar el método de reducción o eliminación de Gauss.

Ejemplo 3.9

Dado el siguiente sistema

$$AX = B \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Para qué valores de a y b, el sistema tiene

1) Solución única. Calcular.

2) Infinitas soluciones.

3) Inconsistencia

Solución.

1) Observamos que la matriz de coeficientes del sistema es una matriz cuadrada

de orden 3, entonces $n = 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{factor común } c_2} b \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow[\text{factor común } f_1]{f_1+\sum f_i} b(a+2) \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} b(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$= b(a+2)(a-1)^2 \neq 0$$

entonces SEL tiene solución única.

Calculamos la solución única usando la regla de Cramer

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{factor común } c_2} b \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-bf_1} b \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 1-b \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = b(a-b)(a-1)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{trasladar } f_3 \text{ a } f_1} (-1)^2 \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-af_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & b-1 & 1-a \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{factor común } f_2} (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & b-1 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$= \xrightarrow{f_3-(b-1)f_2} (1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & 2-b(a+1) \end{vmatrix} = (1-a)[2-b(a+1)]$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{factor común } c_2} b \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

(a) Si $b = 0$, $a \neq -2$, $a \neq 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - af_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(\frac{1}{1-a})f2,\ \frac{1}{2}f_3]{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$ entonces el SEL es inconsistente.

(b) Si $b \neq 0$, $a = -2$, $a \neq 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & -2b & 1 & b \\ 1 & b & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2b & 1 & b \\ -2 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & -3b & 3 & 1+2b \\ 0 & 3b & -3 & 1-b \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & -3b & 3 & 1+2b \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{3b})f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & 1 & \frac{-1}{b} & \frac{1+2b}{-3b} \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{pmatrix}$$

b1) Si $b = -2$ entonces

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$

$$y = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(t+1)$$
$$x = -4y - z - 2 = t$$



entonces $S = \{t, -\frac{1}{2}(t+1), t\}$, $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

b2) Si $b \neq -2$, entonces

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b} & \frac{1+2b}{-3b} \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right) \xrightarrow{(\frac{1}{b+2})f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2b & 1 & b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{b} & \frac{1+2b}{-3b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$, entonces el SEL es inconsistente

(c) $b \neq 0$, $a \neq -2$, $a = 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & b & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

c1) Si $b = 1$, entonces

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 1 < n$ entonces existe $n - 1 = 2$ incógnitas arbitrarias

$$z = r$$
$$y = m$$
$$x = -y - z + 1 = -m - r + 1$$

entonces $S = \{1 - m - r, m, r\}$, $r, m \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de dos parámetros.

c2) Si $b \neq 1$, entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ \end{array}\right) \xrightarrow{(\frac{1}{b-1})f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1 \\ \end{array}\right)$$

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 1,\ r(A|B) = 2$, entonces el SEL es inconsistente.



(d) $b = 0,\ a = -2,\ a \neq 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}f_3,\ \frac{1}{3}f_2]{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2,\ r(A|B) = 3$, entonces el SEL es inconsistente.

(e) $b = 0,\ a \neq -2,\ a = 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 1,\ r(A|B) = 2$, entonces el SEL es inconsistente

3) El SEL es inconsistente en los siguientes casos:

$b = 0,\ a \neq -2,\ a \neq 1$

$b \neq -2,\ a = -2,\ a \neq 1$

$b \neq 1,\ a \neq -2,\ a = 1$

$b = 0,\ a = -2,\ a \neq 1$

$b = 0,\ a \neq -2,\ a = 1$

Ejemplo 3.20

Dado el siguiente SEL

$$AX = B \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b - 1 \end{cases}$$

Para qué valores de a y b el sistema tiene:

1) Solución única. Calcular.

2) Infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

3) Infinitas soluciones que dependen de dos parámetros.

4) Inconsistencia.

Solución.

1) La matriz de coeficientes es una matriz cuadrada de orden 3, entonces $n = 3$ (número de incógnitas)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ a & 2b-1 & 3 \\ a & b & b+3 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 \end{vmatrix}$$
$$= a(b-1)(b+1) \neq 0$$

entonces el sistema tiene solución única. Calculamos la solución única usando la regla de Cramer

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & b & 2 \\ 1 & 2b-1 & 3 \\ 2b-1 & b & b+3 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-(2b-1)f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} 1 & b & 2 \\ 0 & b-1 & 1 \\ 0 & 2b(1-b) & 5-3b \end{vmatrix}$$
$$= (b-1)(5-b)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \\ \ldots \end{vmatrix} \xrightarrow{f_2-f_1} \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ a & 2b-1 & b+3 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2b-2 & b+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} - \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 2(b-1) & b+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2a(b-1)$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a & 2b-1 & 1 \\ a & b & 2b-1 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2b-2 \end{vmatrix}$$

$$= 2a(b-1)^2$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{5-b}{a(b+1)}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-2}{b+1}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2(b-1)}{b+1}$$

2)

$$|A| = a(b-1)(b+1) = 0 \iff \begin{cases} (a) & a = 0,\ b \neq 1,\ b \neq -1 \\ (b) & a \neq 0,\ b = 1,\ b \neq -1 \\ (c) & a \neq 0,\ b \neq 1,\ b = -1 \\ (d) & a = 0,\ b = 1,\ b \neq -1 \\ (e) & a = 0,\ b \neq 1,\ b = -1 \\ & a \neq 0,\ b = 1,\ b = -1 \text{ no es posible} \\ & a = 0,\ b = 1,\ b = -1 \text{ no es posible} \end{cases}$$

(a) $a = 0,\ b \neq 1,\ b \neq -1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & 2b-1 & 3 & 1 \\ 0 & b & b+3 & 2b-1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 0 & b & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & b+1 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-bf_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)f_1} \begin{pmatrix} \cdots & 2 & 1 \\ 0\ 0 & b+1 & 2b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0\ 0 & 2-b & 1-b \\ 0\ 0 & b+1 & 2b-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{b+1})f_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 1-b \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-2}{b+1} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-2}{b+1} \\ 0 & 0 & 2-b & 1-b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-(2-b)f_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-2}{b+1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(b-1)(b-5)}{b+1} \end{pmatrix}$$

Si $b = 5$, entonces

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = \frac{4}{3}$$

$$y = -z + 1 = -\frac{1}{3}$$

$$x = t$$

$S = \{t, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\}$, $t \in \mathbb{R}$ Infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

Si $b \neq 5$ entonces

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2(b-1)}{b+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2, r(A|B) = 3$, entonces el SEL es inconsistente.

(b) $a \neq 0$, $b = 1$, $b \neq -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a}f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{a} & \frac{2}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = 0$$

$$y = r$$

$$x = -\frac{1}{a}y - \frac{2}{a}z + \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}r + \frac{1}{a}$$

$S = \{-\frac{1}{a}r + \frac{1}{a}, r, 0\}$, $r \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(c) $a \neq 0,\ b \neq 1,\ b = -1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -1 & 2 & 1 \\ a & -3 & 3 & 1 \\ a & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{4})f_3]{\frac{1}{a}f_1,\ (-\frac{1}{2})f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{a} & \frac{2}{a} & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2, r(A|B) = 3$, entonces el SEL es inconsistente.

(d) $a = 0,\ b = 1,\ b \neq -1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = 0$$

$$y = -2z + 1 = 1$$
$$x = m$$

$S = \{m, 1, 0\},\ m \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(e) $a = 0,\ b \neq 1,\ b = -1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-\frac{1}{4})f_3]{(-1)f_1,\ (-\frac{1}{3})f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2,\ r(A|B) = 3$, entonces el SEL es inconsistente.

3) No existen soluciones que dependen de dos parámetros.

4) Inconsistencia en los siguientes casos:

(a) $a = 0,\ b \neq 5,\ b \neq -1$

(b) $a \neq 0,\ b \neq 1,\ b = -1$

(c) $a = 0,\ b \neq 1,\ b = -1$

Ejemplo 3.21

Dado el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas

$$AX = B \begin{cases} x + 2y - w = b \\ 3x + ay - 5z + 2w = 3 \\ x - 5z + aw = b \end{cases}$$

¿Para qué valores de a y b el sistema es consistente?

¿Para qué valores de a y b el sistema es consistente?

Solución.

Observamos que la matriz de coeficientes del sistema es una matriz rectangular de orden 3×4, es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, entonces $n = 4$. A diferencia de los ejemplos anteriores solo queda encontrar la forma escalonada de $(A|B)$ usando el método de eliminación de Gauss.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 3 & a & -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -5 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & a-6 & -5 & 5 & 3-3b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 \times f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & -2 & -5 & a+1 & 0 \\ 0 & a-6 & -5 & 5 & 3-3b \end{pmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2})f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & a-6 & -5 & 5 & 3-3b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-(a-6)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20-5a}{2} & \frac{a^2-5a+4}{2} & 3-3b \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}(4-a) & \frac{(a-1)(a-4)}{2} & 3(1-b) \end{pmatrix}$$

Analizamos la 3ª fila de la matriz obtenida. Se dan los siguientes casos:

1) $a \neq 4,\ a \neq 1,\ b \neq 1$

2) $a = 4,\ a \neq 1,\ b \neq 1$

3) $a \neq 4,\ a = 1,\ b \neq 1$

4) $a \neq 4,\ a \neq 1,\ b = 1$

5) $a = 4,\ a \neq 1,\ b = 1$

6) $a \neq 4,\ a = 1,\ b = 1$

$a = 4,\ a = 1,\ b \neq 1$ no es posible

$a = 4,\ a = 1,\ b = 1$ no es posible

1) $a \neq 4,\ a \neq 1,\ b \neq 1$

$$(A|B) \xrightarrow{\frac{2}{5}(\frac{1}{4-a})f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{5} & \frac{6}{5}(\frac{1-b}{4-a}) \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n$ entonces existe $n - 3 = 1$ incógnita arbitraria, $w = t$ resolviendo de retroceso por sustitución

$$S = \{(2a+1)t + \frac{6-b(a+2)}{4-a}, -at - \frac{3(1-b)}{4-a}, (\frac{a-1}{5})t + \frac{6(1-b)}{5(4-a)}, t\},\ t \in \mathbb{R}$$

2) $a = 4,\ a \neq 1,\ b \neq 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3(1-b) \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{3(1-b)}f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2,\ r(A|B) = 3$, entonces el SEL es inconsistente.

Si $b = 1$ entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B) \qquad \text{(caso 5)}$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 2$ incógnitas arbitrarias

$$w = r$$

$$z = k$$

$$y = -\frac{5}{2}z + \frac{5}{2}w = -\frac{5}{2}(k - r)$$

$$x = -2y + w + 1 = 5k - 4r + 1$$

... infinitas soluciones que dependen

$S = \{5k-4r+1, -\frac{5}{2}(k-r), k, r\}$, $k, r \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de dos parámetros

3) $a \neq 4,\ a = 1,\ b \neq 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 15/2 & 0 & 3(1-b) \end{array}\right) \xrightarrow{(\frac{2}{15})f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5}(1-b) \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n$ entonces existe $n - 3 = 1$ incógnita arbitraria

$$w = m$$
$$z = \frac{2}{5}(1-b)$$
$$y = -\frac{5}{2}z + w = (b-1) + m$$
$$x = 2 - b - m$$

$S = \{2-b-m, b-1+m, \frac{2}{5}(1-b), m\}$, $m \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

4) $a \neq 4,\ a \neq 1,\ b = 1$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}(4-a) & \frac{(a-1)(a-4)}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{2}{5}(\frac{1}{4-a})f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{a+1}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1-a}{5} & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n$ entonces existe $n - 3 = 1$ incógnita arbitraria

$$w = h$$
$$z = (\frac{a-1}{5})w = (\frac{a-1}{5})h$$
$$y = -\frac{5}{2}z + \frac{a+1}{2}w = \frac{1}{2}(1-a)h + (\frac{a+1}{2})h = h$$
$$x = -2y + w + 1 = -h + 1$$

$S = \{1-h, h, (\frac{a-1}{5})h, h\}$, $h \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un

$S = \{1-h, h, (\frac{[illegible]}{5})h, h\}$, $h \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

5) Dentro del caso 2)

6) $a \neq 4$, $a = 1$, $b = 1$

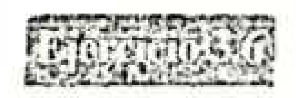
$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(\frac{2}{15})f_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n$ entonces existe $n - 3 = 1$ incógnita arbitraria

$$w = q$$
$$z = 0$$
$$y = -\frac{5}{2}z + w = q$$
$$x = -2y + w + 1 = -q + 1$$

$S = \{1-q, q, 0, q\}$, $q \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro

3.3 Ejercicios resueltos



El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & a & a \\ a & a & 5a \\ 2a & 3a & -3a \end{pmatrix}$$

con $a \neq 0$ y $B = (5, b_2, b_3, 14)^T$ tiene solución única $X = (1, 2, -2)^T$.



Determinar A y B, si se sabe que la forma escalonada de A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución.
En efecto

$$(E_A|E_B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & d_1 \\ 0 & 1 & -2 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{array}\right)$$

$$E_A X = E_B$$

$$E_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $d_1 = 5,\ d_2 = 6,\ d_3 = -2,\ d_4 = 0$ y

$$(E_A|E_B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3.3}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & a & a & b_2 \\ a & a & 5a & b_3 \\ 2a & 3a & -3a & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4-(2a)f_1]{f_2-2f_1,\ f_3-af_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & a-6 & a-2 & b_2-10 \\ 0 & -2a & 4a & b_3-5a \\ 0 & -3a & -5a & 14-10a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{2a})f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{b_3-5a}{\cdots} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \times f_3]{} \begin{pmatrix} & & & -2a \\ 0 & a-6 & a-2 & b_2-10 \\ 0 & -3a & -5a & 14-10a \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$



Comparando la 2ª fila de (3.3) y (3.4), entonces $\frac{b_3-5a}{-2a} = 6$ y

$$(A|B)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & a-6 & a-2 & b_2-10 \\ 0 & -3a & -5a & 14-10a \end{array}\right) \xrightarrow[f_4+(3a)f_2]{f_3-(a-6)f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3a-14 & b_2-6a+26 \\ 0 & 0 & -11a & 14+8a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 \times f_4]{(-\frac{1}{11a})f_4} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14+8a}{-11a} \\ 0 & 0 & 3a-14 & b_2-6a+26 \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

Comparando la 3ª fila de (3.3) y (3.5), entonces

$$\frac{14+8a}{-11a} = -2 \Longrightarrow a = 1$$

y

$$(A|B) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -11 & b_2+20 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+11f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b_2-2 \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Comparando la 4ª fila de (3.3) y (3.6), entonces

$$b_2 - 2 = 0 \Longrightarrow b_2 = 2$$

y

$$\frac{b_3-5a}{-2a} = 6 \Longrightarrow b_3 = -7$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$$



Comprobando

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} = B \; .$$



Sean A, B, C, D y E matrices no singulares donde:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 16 & 10 & 8 \\ 24 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $|A| > 0$ y $|A|^{-1}B^{-1} = B^{-1}C^{-1}A^{-1}$. Resolver el sistema

$$(AD^2E^3)X = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución.
En efecto:

$$|A|^{-1}B^{-1} = B^{-1}C^{-1}A^{-1}$$
$$B^{-1} = B^{-1}C^{-1}\underbrace{A^{-1}|A|}$$
$$B^{-1} = B^{-1}C^{-1}\,\text{adj}(A)$$
$$I = C^{-1}\,\text{adj}(A)$$

Entonces $\text{adj}(A) = C$

$$|\text{adj}(A)| = |A|^2 = |C|$$
$$|C| = 8(16) = |A|^2$$
$$|A| = \pm 8\sqrt{2}$$
$$|A| = 8\sqrt{2} > 0$$

$$|A| = 8\sqrt{2} > 0$$



$\operatorname{adj}(A) = C$, entonces

$$|A|A^{-1} = C$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 16 & 10 & 8 \\ 24 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$A = 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 24 & 0 & -8 \\ -28 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A = \frac{4\sqrt{2}}{16}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 24 & 0 & -8 \\ -28 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = DD = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$E^2 = EE = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = E^2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AD^2E^3 = A = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 24 & 0 & -8 \\ -28 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(AD^2E^3)X = AX = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 24 & 0 & -8 \\ -28 & 8 & 4 \end{pmatrix} X = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se reduce a resolver el sistema

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = 1 \\ 24x - 8z = 2 \\ -28x + 8y + 4z = 3 \end{cases}$$

Usando el método de Cramer para encontrar la solución única puesto que $|A| \neq 0$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 16(11)$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 24 & 2 & -8 \\ -28 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16(30)$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 24 & 0 & 2 \\ -28 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 16(29)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 24 & 0 & -8 \\ -28 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 256$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{16(11)}{256} = \frac{11}{16}$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{16(30)}{256} = \frac{30}{16}$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{16(29)}{256} = \frac{29}{16}$$

$S = \{\frac{11}{16}, \frac{30}{16}, \frac{29}{16}\}$






Ejercicio 3.8

Si

$$\text{adj}(A^T)\,\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & d \\ a+b & 4 & c \\ c & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Resolver $(\text{adj}(A^T)\,\text{adj}(A))X = B$ donde

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución.

En efecto:

$$\text{adj}(A^T)\,\text{adj}(A) = \text{adj}(AA^T)$$

Analizando AA^T

$$(AA^T)^T = AA^T \Longrightarrow AA^T \text{ es simétrica}$$

entonces $\text{adj}(AA^T)$ es simétrica

$$\begin{cases} a+b = 3 \\ c = d \\ c = 1 \end{cases}$$

Luego

$$\text{adj}(AA^T) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = C$$

se reduce a resolver el sistema $CX = B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Usando el método de eliminación de Gauss

$$(C|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \times f_3]{(-\frac{1}{2})f_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + 5f_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{12})f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (E_C|E_B)$$

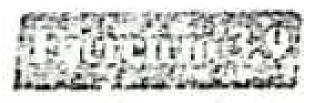
Resolviendo el sistema de retroceso por sustitución

$$z = -\frac{1}{2}$$

$$y = 2 + 2z = 2 + 2(-\frac{1}{2}) = 1$$

$$x = 3 - 3y - z = 3 - 3(1) - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$S = \{\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\}$



Resolver el sistema

$$((A(A^T A)^{-1} A^T)^3 - A(A^T A)^{-1} A^T + 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.
En efecto

$$\begin{aligned}(A(A^TA)^{-1}A^T)^2 &= (A(A^TA)^{-1}A^T)(A(A^TA)^{-1}A^T)\\ &= A(A^TA)^{-1}(A^TA)(A^TA)^{-1}A^T\\ &= A(A^TA)^{-1}A^T\end{aligned}$$

entonces

$$(A(A^TA)^{-1}A^T)^3 = A(A^TA)^{-1}A^T$$

Luego el problema se reduce a resolver

$$(2I)X = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es decir:

$$IX = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S = \{-3, 4, 2\}$

Ejercicio 3.10

Si $A^{-1} = F_{23}(-2)F_2(\frac{1}{2})F_{13}(-6)F_{12}(-4)F_1(\frac{1}{2})$ y $|A| = 6$ y

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad 6$$

el sistema $(\text{adj}(A) \pm C)X = B$ donde $X = (x, y, z)^T$ y $B = (1, 0, 1)^T$



1) ¿Tiene única solución? Calcular

2) ¿Tiene infinitas soluciones? Calcular

Solución.
En efecto

$$\text{adj}(A) = |A|A^{-1} = 6A^{-1}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-4f_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-6f_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-2f_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= A^{-1}$$

entonces

$$\text{adj}(A) = 6\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) + C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -10 & -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 \\ -4 & 4 & -4 \\ -10 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= M \text{ (simétrica)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & -10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{adj}(A) - C = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -10 & -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= N \text{ (antisimétrica)}$$

1)

$$|M| = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -10 \\ -4 & 4 & -4 \\ -10 & -4 & 12 \end{pmatrix} = 2(-4)2 \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -16(45) \neq 0$$

entonces el sistema $MX = B$ tiene solución única.

Usando la regla de Cramer

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 88$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -10 \\ -4 & 0 & -4 \\ -10 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 152$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \\ -10 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 64$$

$$x = \frac{|M_1|}{|M|} = \frac{88}{-16(45)} = -\frac{11}{90}$$
$$y = \frac{|M_2|}{|M|} = \frac{152}{-16(45)} = -\frac{19}{90}$$
$$z = \frac{|M_3|}{|M|} = \frac{64}{-16(45)} = -\frac{8}{90}$$

$S = \{-\frac{11}{90}, -\frac{19}{90}, -\frac{8}{90}\}$

2)

$$N = -N^T$$
$$|N| = |-N^T| = (-1)^3|N^T| = -|N|$$

entonces

$$2|N| = 0 \Longrightarrow |N| = 0$$

$r(N) < 3$



Usando el método de eliminación de Gauss

$$(N|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 10 & 1 \\ -4 & 0 & 4 & 0 \\ -10 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{4}f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ -10 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3+10f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}f_3]{f_3+f_2,\ \frac{1}{4}f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{10}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_N|E_B)$$

$r(N) = 2,\ r(N|B) = 3$ entonces el SEL es inconsistente.

[illegible]

Resolver el sistema $(A + C)X = B$ donde

$$C = \begin{pmatrix} 3k-2 & 2k+1 & k+1 \\ 2k-2 & 2k-4 & k-2 \\ 4k & 3k-2 & 2k-4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ k+1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$24\,\mathrm{adj}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1} = F_3(\frac{1}{4})F_{23}(-2)F_2(\frac{1}{3})F_{13}(\alpha)F_{12}(-1)F_1(\frac{1}{2})$$

Solución.

$$\mathrm{adj}(A^{-1}) = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{|A|}A$$

$$A = F_1(2)F_{12}(1)F_{13}(-\alpha)F_2(3)F_{23}(2)F_3(4)I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix} \xrightarrow{4f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix}0&0&4\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&2&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3f_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-\alpha f_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\-\alpha&2&4\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2+f_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&0\\-\alpha&2&4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2f_1}\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&0\\-\alpha&2&4\end{pmatrix}=A$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&0\\-\alpha&2&4\end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj}(A^{-1})=\frac{A}{|A|}=\frac{A}{24}$$

entonces

$$24\operatorname{adj}(A^{-1})=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&0\\-\alpha&2&4\end{pmatrix}$$

comparando con los datos, entonces $\alpha=1$, luego

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&3&0\\-1&2&4\end{pmatrix}$$

$$A+C=\begin{pmatrix}3k&2k+1&k+1\\2k-1&2k-1&k-2\\4k-1&3k&2k\end{pmatrix}=M$$

El problema se reduce a resolver el sistema $MX=B$

$$|M|=(k-1)(k^2-1)=(k-1)^2(k+1)$$

1) El sistema $MX=B$ tiene solución única si $|M|\neq 0$ entonces $k\in\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Usamos la regla de Cramer.

$$|M_1|=\begin{vmatrix}k&2k+1&k+1\\k+1&2k-1&k-2\end{vmatrix}=(4k+1)(k-1)\Longrightarrow x=\frac{|M_1|}{|M|}=\frac{4k+1}{k^2-1}$$

$1 \quad 3k \quad 2k$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 3k & k & k+1 \\ 2k-1 & k+1 & k-2 \\ 4k-1 & 1 & 2k \end{vmatrix} = k(2k-7)(k-1) \Longrightarrow y = \frac{|M_2|}{|M|} = \frac{k(2k-7)}{k^2-1}$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} 3k & 2k+1 & k \\ 2k-1 & 2k-1 & k+1 \\ 4k-1 & 3k & 1 \end{vmatrix} = -3k(k-1)^2 \Longrightarrow z = \frac{|M_3|}{|M|} = \frac{-3k}{k+1}$$

2) $|M| = 0 \Longleftrightarrow k = \pm 1$

(a) Si $k = 1$ entonces

$$(M|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\frac{1}{5})f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_M|E_B)$$

$r(M) = r(M|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria digamos

$$y = t$$
$$z = -1$$
$$x = -y + z + 2 = -t - 1 + 2 = -t + 1$$

$S = \{-t + 1, t, -1\}$, $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

(b) Si $k = -1$

$$(M|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}-3 & -1 & 0 & -1\\ -3 & -3 & -3 & 0\\ -5 & -3 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow[f_1\times f_2]{(-\frac{1}{3})f_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 0 & -1\\ -5 & -3 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+5f_1]{f_2+3f_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-f_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{2})f_2,\ (\frac{1}{2})f_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=(E_M|E_B)$$

$r(M)=2,\ r(M|B)=3$, entonces el SEL es inconsistente.



Si

$$F_3(-1)F_{34}(2)F_{24}(-3)F_{23}(1)F_{13}(-2)F_{12}(3)A=\begin{pmatrix}a & a & 1 & 2a & -1\\ 0 & a & 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & -2\end{pmatrix}$$

resolver el sistema $AX=B$, donde

$$X=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T,\qquad B=(a,-2a,a,2a)^T;\ \forall a\in\mathbb{R}$$

Solución.
Veamos, sea

$$PA=M$$
$$A=P^{-1}M$$

$$=F_{12}(-3)F_{13}(2)F_{23}(-1)F_{24}(3)F_{34}(-2)F_3(-1)\begin{pmatrix}a & a & 1 & 2a & -1\\ 0 & a & 0 & 2a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 0 & a & -2\end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)f_3} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4-2f_3} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -a & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4+3f_2} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & 0 \\ 0 & 3a & 2 & 5a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & -a & -1 & -a & 0 \\ 0 & 3a & 2 & 5a & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+2f_1} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 \\ 2a & a & 1 & 3a & -2 \\ 0 & 3a & 2 & 5a & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2-3f_1} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 \\ -3a & -2a & -3 & -4a & 3 \\ 2a & a & 1 & 3a & -2 \\ 0 & 3a & 2 & 5a & -2 \end{pmatrix} = A$$

A es una matriz rectangular de orden 4×5, donde el número de incógnitas es $n = 5$.

Usando el método de eliminación de Gauss en la matriz aumentada $(A|B)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a & a & 1 & 2a & -1 & a \\ -3a & -2a & -3 & -4a & 3 & -2a \\ 2a & a & 1 & 3a & -2 & a \\ 0 & 3a & 2 & 5a & -2 & 2a \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2+3f_1} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 & a \\ 0 & -a & -1 & -a & 0 & -a \\ 0 & 3a & 2 & 5a & -2 & 2a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_4-3f_2]{f_3+f_2} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -a & -2 & -a \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4+2f_3} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -2 & -a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)f_3} \begin{pmatrix} a & a & 1 & 2a & -1 & a \\ 0 & a & 0 & 2a & 0 & a \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -2 & -a \end{pmatrix}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$, $r(A) = r(A|B) = 4 < n$ entonces el sistema no tiene solución única.

1) Si $a \neq 0$, entonces

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & \frac{1}{a} & 2 & -\frac{1}{a} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{a} & -1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 4 < n$ entonces existe $n - 4 = 1$ incógnita arbitraria. Resolviendo el sistema de retroceso por sustitución:

$$\begin{aligned} x_5 &= t \\ x_4 &= \frac{2}{a}x_5 - 1 = \frac{2}{a}t - 1 \\ x_3 &= ax_4 = a\left(\frac{2}{a}t - 1\right) = 2t - a \\ x_2 &= -2x_4 + 1 = -2\left(\frac{2}{a}t - 1\right) = -\frac{4}{a}t + 2 \\ x_1 &= -x_2 - \frac{1}{a}x_3 - 2x_4 + \frac{1}{a}x_5 + 1 = -\frac{1}{a}t + 2 \end{aligned}$$

entonces $S = \{-\frac{1}{a}t+2, -\frac{4}{a}t+2, 2t-a, \frac{2}{a}t-1, t\}$, $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

2) Si $a = 0$, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(-\frac{1}{2})f_4]{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4 - f_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$= (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 3$ incógnitas arbitrarias.

$$x_1 = r, \qquad x_2 = m, \qquad x_4 = h, \qquad x_3 = x_5 = 0$$



$S = \{r, m, 0, h, 0\}$, $r, m, h \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de tres parámetros.

Ejercicio 3.13

Los sistemas $AX = B$ y $E_AX = E_B$ son equivalentes

$$AX = B \begin{cases} ax - by + a^2z = 0 \\ x - ay + z = b \\ x - a^2y + acz = ab \end{cases} \qquad E_AX = E_B \begin{cases} x - ay + z = b \\ y - az = ab + c \\ z = a^3b - c^2 \end{cases}$$

a) Hallar las constantes a, b y c si $a \neq 0$ y $a^2 - b \neq 0$

b) Resolver el sistema $AX = B$ con las constantes halladas en (a)

Solución.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -b & a^2 & -c \\ 1 & -a & 1 & b \\ 1 & -a^2 & ac & ab \end{array}\right) \qquad (E_A|E_B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & 1 & b \\ 0 & 1 & -a & ab + c \\ 0 & 0 & 1 & a^3b - c^2 \end{array}\right)$$

Aplicamos el método de eliminación de Gauss a la matriz $(A|B)$ para obtener $(E_A|E_B)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -b & a^2 & -c \\ 1 & -a & 1 & b \\ 1 & -a^2 & ac & ab \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & b \\ a & -b & a^2 & -c \\ 1 & -a^2 & ac & ab \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 - f_1]{f_2 - af_1} \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & b \\ 0 & -b + a^2 & a^2 - a & -c - ab \\ 0 & a - a^2 & ac - 1 & ab - b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{a^2 - b})f_2} \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & b \\ 0 & 1 & \frac{a^2 - a}{a^2 - b} & \frac{-c - ab}{c^2 - b} \\ 0 & a - a^2 & ac - 1 & ab - b \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-(a-a^2)f_2} \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & \\ 0 & 1 & \frac{a^2-a}{a^2-b} & \frac{-c-ab}{a^2-b} \\ 0 & 0 & \frac{(a^2-a)^2}{a^2-b}+ac-1 & \frac{(a^2-a)(-c-ab)}{a^2-b}+ab-b \end{pmatrix}$$

Comparando este resultado con la matriz $(E_A|E_B)$ se tiene

$$\frac{a^2-a}{a^2-b} = -a$$
$$\frac{a-1}{a^2-b} = -1$$
$$a-1 = b-a^2 \tag{3.7}$$

$$\frac{-c-ab}{a^2-b} = ab+c$$
$$\frac{ab+c}{b-a^2} = ab+c$$
$$b-a^2 = 1 \tag{3.8}$$

$$\frac{(a^2-a)^2}{a^2-b}+ac-1 = 1 \tag{3.9}$$

De (3.7) y (3.8) se deduce que $a=2$. En (3.8):

$$b-a^2 = b-4 = 1 \Longrightarrow b=5$$

En (3.9)

$$\frac{4}{-1}+2c-1 = 1 \Longrightarrow c=3$$

$$AX=B \begin{cases} 2x-5y+4z=-3 \\ x-2y+z=5 \\ x-4y+6z=10 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-2f_1}\begin{pmatrix}1&-2&1&5\\0&-1&2&-13\\0&-2&5&5\end{pmatrix}\xrightarrow{f_3-2f_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&5\\0&-1&2&-13\\0&0&1&31\end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{(-1)f_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&5\\0&1&-2&13\\0&0&1&31\end{array}\right)=(E_A|E_B)$$

Resolviendo en retroceso por sustitución

$$z = 31$$
$$y = 2z + 13 = 75$$
$$x = 2y - z + 5 = 124$$

$S = \{124, 75, 31\}$

Método directo: Reemplazando a, b y c en el sistema

$$E_AX = E_B\begin{cases}x-2y+z=5\\ \qquad y-2z=13\\ \qquad\qquad z=31\end{cases}$$

se obtiene la misma solución $S = \{124, 75, 31\}$

Ejercicio [illegible]

A y C son matrices cuadradas de orden 3, donde $AC = I$

$$A = F_{31}(b)F_{32}(1)F_{21}(\tfrac{1}{2})F_2(2)F_{12}(1)F_1(\tfrac{1}{2})$$
$$C = F_{31}(a)F_{32}(c)F_{21}(-1)F_{12}(-1)$$
$$D = \text{adj}(\text{adj}(\text{adj}(A))) = (d_{ij}) \text{ donde } d_{13} = -7$$

Resolver $(A + C)X = B$ si $B = (a, b, c)^T$

Solución.

En efecto, obtenemos A, C y D

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\ \end{pmatrix}\xrightarrow{(\frac{1}{2})f_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\ \end{pmatrix}\xrightarrow{f_2+f_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0\\ \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2f_2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1+\frac{1}{2}f_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2+f_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_1+bf_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & b\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_2-f_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1-f_2}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2+cf_3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{f_1+af_3}\begin{pmatrix}2 & -1 & a\\ -1 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=C$$

$D=\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)))$

$$\operatorname{adj}(A)=|A|A^{-1}$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))=\operatorname{adj}(|A|A^{-1})=\left||A|A^{-1}\right|\left(|A|A^{-1}\right)^{-1}$$

$$=|A|^3|A^{-1}|\frac{1}{|A|}A=|A|A$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)))=\operatorname{adj}(|A|A)$$

$$=\left||A|A\right|\left(|A|A\right)^{-1}$$

$$=|A|^3|A|\frac{1}{|A|}A^{-1}$$

$$=|A|^3A^{-1}$$

$D=|A|^3A^{-1}$, pero $|A|=1$ entonces $D=A^{-1}$.

Si $AC=I$, entonces $C=A^{-1}$. Por lo tanto, $D=C=A^{-1}$

$$D=\begin{pmatrix}2 & -1 & a\\ -1 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad d_{13}=-7\Longrightarrow a=-7$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1 & b\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & a\\ -1 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & a+c+b\\ 0 & 1 & a+2c+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$\begin{cases} a+c+b=0\Longrightarrow b=-a-c\Longrightarrow b=7-c\\ a+2c+1=0\Longrightarrow 2c=-1+7\Longrightarrow c=3,\ b=4\\ a=-7\end{cases}$$

Sea

$$M=A+C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1 & -7\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$MX=B\Longrightarrow\begin{pmatrix}3 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$$

$$(M|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 0 & -3 & -7\\ 0 & 3 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}f_3]{\frac{1}{3}f_1,\ \frac{1}{3}f_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -\frac{7}{3}\\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\end{array}\right)=(E_M|E_B)$$

Resolviendo de retroceso por sustitución

$$z=\frac{3}{2}$$
$$y=-\frac{4}{3}z+\frac{4}{3}=-2+\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}$$
$$x=z-\frac{7}{3}=\frac{3}{2}-\frac{7}{3}=-\frac{5}{6}$$

$S=\{-\frac{5}{6},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\}$

3.4 Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

3.4 Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

El sistema homogéneo de ecuaciones lineales (SHEL) es un caso particular de los sistemas de ecuaciones lineales (SEL)



Definición 3.10

Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales. Si $B = 0$, entonces $AX = 0$ se llama **sistema homogéneo de ecuaciones lineales.**

Es decir, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es homogéneo si el vector columna de los términos independientes del sistema son todos igual a cero.

$$AX = 0 \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nota

1) Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ siempre es consistente, es decir siempre tiene solución, puesto que $r(A) = r(A|0)$.

2) $X = 0$ es siempre solución del sistema homogéneo $AX = 0$ y se llama **solución trivial** del SHEL.

Luego, es de nuestro interés determinar cuando existen otras soluciones distintas de $X = 0$, es decir soluciones diferentes a la solución trivial. La respuesta se da en el siguiente teorema.

Teorema 3.6

Un sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n variables o incógnitas $AX = 0$, tiene solución diferente de $X = 0$ si y solo si $r(A) = r < n$


Nota

1) Si $r(A) = r < n$ entonces existen $n - r$ variables arbitrarias, es decir, infinitas

soluciones no triviales.

2) Si $r(A) = n$ entonces el SHEL tiene solución única, la solución trivial $X = 0$.



Se observa que, si en el sistema homogéneo $AX = 0$, A es una matriz cuadrada de orden n, entonces la nota anterior toma la siguiente forma:

1) $|A| = 0$, entonces el SHEL tiene infinitas soluciones diferentes de la solución trivial.

2) $|A| \neq 0$, entonces el SHEL tiene solución única, la solución trivial $X = 0$.

Ejemplo 3.22

En el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \begin{cases} (\lambda+3)x + y + z = 0 \\ x + (\lambda+3)y + z = 0 \\ x + y + (\lambda+3)z = 0 \end{cases}$$

Para qué valores de λ el sistema tiene

1) Solución única.

2) Infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones.

Solución.

Observamos que la matriz de coeficientes de $AX = 0$ es una matriz cuadrada, donde el número de incógnitas es $n = 3$. Entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{factor común } f_1]{f_1+\sum f_i} (\lambda+5)\begin{vmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 1 & \lambda+3 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} (\lambda+5)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda+2)^2$$

1) $|A| = (\lambda+5)(\lambda+2)^2 \neq 0$ entonces SHEL tiene solución única, la solución

1) $|A| = (\lambda + 5)(\lambda + 2)^2 \neq 0$ entonces
trivial $X = 0$.

2) $|A| = 0$ si y solo si $\lambda = -5$, $\lambda = -2$



(a) Si $\lambda = -5$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[f_3 - f_2]{f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{3}f_2]{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$

$$y = z = t$$

$$x = 2y - z = 2t - t = t$$

$S = \{t, t, t\}$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si $\lambda = -2$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 1 < n$ entonces existen $n - 1 = 2$ incógnitas arbitrarias

$$z = r$$

$$y = m$$

$$x = -y - z = -m - r$$

$S = \{-m - r, m, r\},\ r, m \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de dos parámetros.



Ejemplo 3.23

Resolver el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 15x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 0 \\ 2x_1 - 10x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución.

La matriz de coeficientes del sistema homogéneo es rectangular donde el número de incógnitas es $n = 4$.

Entonces usaremos el método de eliminación de Gauss y trabajaremos con la matriz aumentada $(A|0)$

$$(A|0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & -15 & 20 & 10 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - 2f_1]{f_2 - 3f_1} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}f_2]{f_3 + f_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_0)$$

$r(A) = r(A|0) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 2$

$$x_4 = t$$

$$x_2 = r$$

$$x_3 = -2x_4 = -2t$$

$$x_1 = 5x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 5r + 12t - 2t = 5r + 10t$$

$S = \{5r + 10t, r, -2t, t\},\ r, t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de dos parámetros.

Observamos que el hecho de agregar una columna de ceros a la matriz A no modifica el rango de A y, por tanto, $r(A) = r(A|0)$ y el sistema homogéneo es siempre consistente.



Ejemplo 3.24

Resolver el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es una matriz cuadrada; sin embargo, usamos el método de eliminación de Gauss.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 2f_1]{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \times f_1]{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{11})f_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{-14}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$

$$y = \frac{14}{11}z = \frac{14}{11}t$$

$$x = -4y + 5z = -\frac{56}{11}t + 5t = -\frac{t}{11}$$

$S = \{-\frac{t}{11}, \frac{14}{11}t, t\}$, $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

3.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 3.15

Determinar el valor o valores de a para los cuales el sistema dado tiene soluciones no triviales, calcular dichas soluciones.

$$AX = 0 \begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Solución.

La matriz de coeficientes del sistema es una matriz cuadrada y el número de incógnitas es $n = 3$. Entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -5(a+4)(a-2) = 0 \Longleftrightarrow a = 2 \text{ o } a = -4$$

I) Si $a = 2$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \times f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3 - 4f_1]{f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{5}f_2]{(\frac{1}{2})f_1,\ f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = t$$

$$y = 0$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}t$$

$S = \{-\frac{1}{2}t, 0, t\}$, $t \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro.



2) Si $a = -4$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \times f_1} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 16 & 3 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_3+2f_1]{f_2+4f_1} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{1}{4})f_1,\ (-1)f_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = r$$
$$y = 6z = 6r$$
$$x = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = -\frac{5}{4}r$$

$S = \{-\frac{5}{4}r, 6r, r\}$, $r \in \mathbb{R}$ infinitas soluciones que dependen de un parámetro



Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la forma escalonada de A, si $MA = E$. Resolver el sistema homogéneo

$M^{-1}X = 0$

Solución.
En efecto, aplicamos en A operaciones elementales por filas para construir la matriz E.



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4+2f_1,\ f_5-3f_1]{f_2-2f_1,\ f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 7 & 2 & 9 \\ 0 & -8 & -8 & -8 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_5+8f_2]{f_3+3f_2,\ f_4-7f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 37 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & -48 & -48 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-\frac{1}{48})f_5]{(-\frac{1}{16})f_3,\ (\frac{1}{37})f_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_5-f_3]{f_4-f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

Se requiere expresar E como un producto de matrices elementales fila

$$F_{35}(-1)F_{34}(-1)F_5(-\frac{1}{48})F_4(\frac{1}{37})F_3(-\frac{1}{16})F_{25}(8)F_{24}(-7)$$
$$F_{23}(3)F_{15}(-3)F_{14}(2)F_{13}(-1)F_{12}(-2)A = E$$
$$MA = E$$

$$M^{-1} = F_{12}(2)F_{13}(1)F_{14}(-2)F_{15}(3)F_{23}(-3)F_{24}(7)$$
$$F_{25}(-8)F_3(-16)F_4(37)F_5(-48)F_{34}(1)F_{35}(1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_5+f_3} \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4+f_3} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&0&1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-16)f_3]{(-48)f_5,\ (37)f_4} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-16&0&0 \\ 0&0&37&37&0 \\ 0&0&-48&0&-48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_5-8f_3} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-16&0&0 \\ 0&0&37&37&0 \\ 0&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_4+7f_2} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&-16&0&0 \\ 0&7&37&37&0 \\ 0&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-3f_2} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&-3&-16&0&0 \\ 0&0&37&37&0 \\ 0&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_5+3f_1} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&-3&-16&0&0 \\ 0&0&37&37&0 \\ 3&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_4-2f_1} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&-3&-16&0&0 \\ -2&0&37&37&0 \\ 3&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+f_1} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 1&-3&-16&0&0 \\ -2&0&37&37&0 \\ 3&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_2+2f_1} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&1&0&0&0 \\ 1&-3&-16&0&0 \\ -2&0&37&37&0 \\ 3&-8&-48&0&-48 \end{pmatrix} = M^{-1}$$

$|M^{-1}| \neq 0$, entonces el sistema homogéneo $M^{-1}X = 0$ tiene solución única, la solución trivial $X = 0$.





Ejercicio 3.17

A y B son matrices cuadradas de orden n donde

$$A = \text{diag}(1, 2, \ldots, n) \text{ y } B = (b_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ b_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Para qué valores de b_i, el sistema homogéneo $(A^n B)X = 0$ tiene solución única. Calcular dicha solución

Solución.

En efecto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & 1 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & 1 & \cdots & b_3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n B = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & 1 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & 1 & \cdots & b_3 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_n & b_n & b_n & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^n B| = |A||B| = (1^n 2^n 3^n \cdots n^n)|B|$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & 1 & b_2 & \cdots & b_2 \\ b_3 & b_3 & 1 & \cdots & b_3 \\ \vdots & & & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_n & b_n & b_n & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1-b_i)\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1-b_i}\right)$$



$$= (1-b_1)(1-b_2)\cdots(1-b_n)\left[1+\frac{b_1}{1-b_1}+\frac{b_2}{1-b_2}+\cdots+\frac{b_n}{1-b_n}\right]$$

$$|B| \neq 0 \iff b_i \neq 1 \text{ y } b_i \neq 0 \ \forall i = 1,2,\ldots,n$$

y el sistema homogéneo $(A^n B)X = 0$ tiene solución única, la solución trivial $X = 0$

Ejercicio 3.18

Si existen x, y, z no todos nulos a la vez tales que

$$\begin{cases} x - by - cz = 0 \\ -ax + y - cz = 0 \\ -ax - by + z = 0 \end{cases}$$

Demostrar que

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 1$$

Solución.

Por los datos del problema, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales $AX = 0$ tiene solución no trivial y por tanto $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} ① & -b & -c \\ -a & 1 & -c \\ -a & -b & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[f_3+af_1]{f_2+af_1} \begin{vmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1-ab & -ac-c \\ 0 & -ab-b & 1-ac \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -b & -c \\ 0 & 1-ab & -c(a+1) \\ 0 & -b(a+1) & 1-ac \end{vmatrix}$$

$$= (1-ab)(1-ac) - bc(a+1)^2$$

$$= (1-ab)(1-ac) - bc(a^2+2a+1)$$

$$= 1 - ac - ab + a^2bc - bca^2 - 2abc - bc = 0$$

entonces

$$1 = 2abc + ab + ac + bc \tag{3.10}$$



Por otro lado

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 1$$

entonces

$$\begin{aligned} a(b+1)(c+1) + b(a+1)(c+1) + c(a+1)(b+1) \\ = (a+1)(b+1)(c+1) \\ a(bc+b+c+1) + b(ac+a+c+1) + c(ab+a+b+1) \\ = (a+1)(b+1)(c+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3abc + 2ab + 2ac + 2bc + \cancel{a+b+c} &= (a+1)(bc+b+c+1) \\ &= abc + ab + ac + a + bc + b + c + 1 \\ &= abc + ab + ac + bc + \cancel{a+b+c} + 1 \end{aligned}$$

$$2abc + ab + ac + bc = 1 \tag{3.11}$$

(3.10)=(3.11) lo que demuestra la proposición

3.6 Ejercicios propuestos

1) Sean

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + w = b_1 \\ x + 5y - z - 2w = b_2 \\ -x + 2y + 2z - 3w = b_3 \\ 3x - y - 3z + 4w = b_4 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + 5y - z - 2w = 2 \\ 7y - z - 5w = 7 \\ 2z = -5 \end{cases}$$

sistemas equivalentes de ecuaciones lineales. Encontrar los términos indepen-

dientes del primer sistema.

Rpta: $b_1 = -3,\ b_2 = 2,\ b_3 = 0,\ b_4 = -3$

2) En el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2 y + a^2 bz = a^2 b \end{cases}$$

Determinar para qué valores de a y b

(a) ¿El sistema tiene solución única? Calcular dicha solución.

(b) La solución del sistema depende de un parámetro. Calcular.

(c) La solución del sistema depende de dos parámetros. Calcular.

(d) El sistema es inconsistente.

3) Sea el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2(t+1)x + 3y + tz = t + 4 \\ (4t-1)x + (t+1)y + (2t-1)z = 2t + 2 \\ (5t-4)x + (t+1)y + (3t-4)z = t - 1 \end{cases}$$

Para qué valores de t

(a) El sistema tiene solución única. Calcular.

(b) El sistema tiene infinitas soluciones.

(c) El sistema es inconsistente.

Rpta: $|A| = (t-1)(t-2)(t-3)$

(a) $|A| \neq 0$ el sistema tiene solución única
$S = \left\{ \frac{2t^3-6t^2-11t-3}{(t-1)(t-2)(t-3)}, \frac{-3t^2+23t-2}{(t-1)(t-2)(t-3)}, \frac{-3t^2+6t^2+18t-3}{(t-1)(t-2)(t-3)} \right\}$

(b) $t = 1 \Rightarrow S = \{2-r, r-1, r\},\ r \in \mathbb{R}$.

(c) Inconsistente

i. $t = 2$

ii. $t = 3$



4) Para qué valores de a el sistema

$$\begin{cases} (a^2+3)x + y + 2z = a \\ a^2x + (a^2-1)y + z = 2a^2 \\ 3(a^2+1)x + a^2y + (a^2+3)z = 3 \end{cases}$$

tiene

(a) Solución única. Calcular.

(b) Infinitas soluciones. Calcular.

(c) No tiene solución.

5) Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ cuya solución única es $(1, -7, 13)^T$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3a & b & 0 \\ 2b & b & 1 \\ 1 & -7 & -a \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ -15 \end{pmatrix}$$

y su forma escalonada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar A y B.

Rpta: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 15 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 13 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$

6) Resolver el siguiente sistema $6A^{-1}X + MX + C$ tal que

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m-1 \\ m \\ m \end{pmatrix} \text{ y } M = \begin{pmatrix} 2m-2 & -m & m+1 \\ m+2 & m-3 & m-2 \\ 2m+9 & m+3 & 2m-7 \end{pmatrix}$$



Además $A^{-1} = F_{23}(-1)F_2(\frac{1}{3})F_{13}(k)F_{12}(-4)F_1(\frac{1}{2})$ y

$$6\,\text{adj}(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 4 & 3 & \cdot \\ 6 & 2 & \cdot \end{pmatrix}$$

Hallar la constante k

7) Sea la matriz

$$\text{adj}(C^T)\,\text{adj}(C) = \begin{pmatrix} 3 & a+b & 0 \\ 6 & 8 & a \\ b+6 & c+2 & 4 \end{pmatrix} - F_1(2)F_2(4)F_{13}(6)F_{21}(3)F_{23}(2)$$

Resolver el sistema

$$(\text{adj}(CC^T))^{-1}X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rpta: $a = 12,\ b = 0,\ c = 26,\ X = (13, 22, 25)^T$

8) El sistema $AX = B$ tiene solución única $X = (2,1,1,1)^T$ cuando $B = (11,12,13,14)^T$ y A es una matriz simétrica de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & c & d & a \\ c & \cdot & a & \cdot \\ d & \cdot & b & c \end{pmatrix}$$

Calcular A^{-1}

9) Sea el siguiente sistema

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $M = A - C$

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{3}{2} & ab+1 & \frac{3}{2} \\ 1 & b+1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \left(F_{13}(1)F_3(2)F_{31}(-1)F_{23}(-1)F_{23}\right)^{-1}$$

para qué valores de a y b el sistema tiene



(a) **Solución única. Calcular.**

(b) Infinitas soluciones.

Rpta: $|M| = b(3-2a)$

(a) $|M| \neq 0$ el sistema tiene solución única
$S = \{\frac{b-a}{3-2a}, \frac{3-a-b}{b(3-2a)}, \frac{(1-a)(b-a)}{3-2a}\}$

(b) i. $a = 3,\ b = 0$ entonces $S = \{1, t, -2\},\ t \in \mathbb{R}$

ii. $a = b = \frac{3}{2}$ entonces
$S = \{-2r, \frac{2r+1}{b}, r\},\ r \in \mathbb{R}$.

iii. Inconsistente

$$a \neq 3 \text{ y } b = 0$$

$$a = \frac{3}{2} \text{ y } b \neq a$$

$$a = b = 0$$

10) Resolver el siguiente sistema $(3C^4 + D)X = B$ tal que $C = A(A^TA)^{-1}A^T$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2m-1 & -m-1 & m \\ m-1 & m-3 & m+1 \\ 2m-2 & m & 2m-3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} m-1 \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

11) Sea el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \begin{cases} bx_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 + bx_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + bx_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_3 + bx_4 + 4x_5 = 0 \\ x_4 + bx_5 = 0 \end{cases}.$$

Para qué valores de b, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales tiene solución única. Infinitas soluciones que dependen de 1, 2, 3 ó 4 parámetros.

Rpta: $|A| = b(b^2-4)(b^2-16)$

$|A| \neq 0$ entonces la solución única es $X = 0$

$$\begin{aligned} b = 0 &\Longrightarrow X = t(1,0,-2,0,1)^T,\ t \in \mathbb{R} \\ b = 2 &\Longrightarrow X = r(-1,2,0,-2,1)^T,\ r \in \mathbb{R} \\ b = -2 &\Longrightarrow X = m(1,2,0,-2,1)^T,\ m \in \mathbb{R} \\ b = 4 &\Longrightarrow X = h(1,-4,6,-4,1)^T,\ h \in \mathbb{R} \\ b = -4 &\Longrightarrow X = k(1,4,6,4,1)^T,\ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Las soluciones no dependen de 2, 3 y 4 parámetros

12) Si $A = A^T$, $C^{-1}A = A(C^{-1})^T$. Resolver el sistema $M^{-1}X = B$ donde $M = \text{adj}(C^{-1}A)$, $B = (2,1,-1)^T$ y

$$\text{adj}(C^{-1})^T \,\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 8-b & b+2 \\ c-3 & 12 & a-2 \\ c & 4 & 5 \end{pmatrix} - F_{23}(1)F_{13}(b)F_2(2)$$

13) Resolver el siguiente sistema $(A + C)X = B$ sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ -3 & a-3 & 1 \\ -5 & -1 & a-1 \end{pmatrix}, \qquad C = F_1(2)F_{12}(4)F_{13}(6)F_2(3)F_{23}(2),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$$



Rpta: $A + C = M$, $\quad |M| = (a+2)(a-1)^2$

$|M| \neq 0$ entonces la solución única es:

$S = \left\{ \frac{-(a+1)}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right\}$

$a = 1$ entonces $S = \{-r - t + 1, r, t\}$, $r, t \in \mathbb{R}$

$a = -2$ inconsistente

14) Sea el sistema $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-a^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-a^2 \end{pmatrix}, \qquad B = (1, a, -a, 1)^T$$

Para qué valores de a el sistema tiene:

(a) Solución única.

(b) Las soluciones dependen de un parámetro.

(c) Las soluciones dependen de dos parámetros.

(d) Las soluciones dependen de tres parámetros.

15) Dada la matriz de orden 3

$$A^{-1} = F_{31}(-\alpha)F_{12}(-1)F_{13}(-2)F_{21}(-\alpha)F_{13} \text{ y } A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & M_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

donde M_{23} es el cofactor del elemento m_{23} de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 3a-2 & 2a+1 & a-2 \\ 2a-2 & 2a-2 & a-3 \\ 4a-3 & 3a-1 & 2a-2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ \cdots \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Resolver el sistema $(A+N)X = B$



Rpta: $\alpha = 1$, $A + N = C$

$|C| = (a-1)^2(a+1)$

$|C| \neq 0$ entonces la solución única es:

$S = \left\{ \frac{-(2a+3)}{(a-1)^2}, \frac{a(2a-7)}{(a-1)^2(a+1)}, \frac{-3a}{a+1} \right\}$

$a = 1$ entonces $S = \{1-t, t, -1\}$, $t \in \mathbb{R}$

$a = -1$ inconsistente

16) Si $A^{-1} = F_{32}(-\alpha)F_{21}(-\alpha)F_{23}(-1)F_{13}(-\alpha)F_{13}$

$$C = \begin{pmatrix} 2c-2 & 1 & c-4 \\ 4c-5 & c-1 & 2c-4 \\ 5c-11 & c-1 & 3c-8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Para qué valores de c el sistema de ecuaciones

$$(A+C)X = \begin{pmatrix} c+3 \\ 2c \\ b-2 \end{pmatrix}$$

tiene

(a) Solución única. Calcular.

(b) Infinitas soluciones.

(c) Inconsistencia.

17) El siguiente sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene por solución $x = 4t$, $y = 2t+2$, $z = 2t$ donde

$$A = F_3\left(\frac{1}{3}\right)F_{23}(-k)F_{12}(-2)F_1\left(\frac{1}{4}\right), \; B^T = (k, 2, 0) \text{ y } k + t = 12$$

Calcule AB

Rpta: $t = k = 6$, $\quad AB = (3/2, -1, 2)^T$

18) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$(A+C)X = \begin{pmatrix} 1+a \\ -1 \\ 2-a \end{pmatrix}$$



si se sabe que

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = F_1(\frac{1}{\alpha})F_{23}(-\alpha)F_{32}(1)F_{13}(-2)F_{12}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5a+1 & 2a & 4a+2 \\ 4a-2 & a-1 & 4a-1 \\ 6a & 2a-1 & 5a+1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

19)

$$A = F_{12}(3a-1)F_{13}(2a)F_{14}(a+1)F_2(1-a)F_3(1-a)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $AX = B = (1, 1, a, 2a^2)^T$. Para que valores de a, el sistema tiene

(a) Solución única. Calcular.

(b) Infinitas soluciones. Calcular.

(c) Inconsistencia.

Rpta:

(a) $a = -\frac{1}{2}$ el sistema tiene solución única
$S = \{-1, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\}$

(b) Para ningún valor de a.

(c) $\forall a \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

20) Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & -7 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ c & a & -5 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_3 \\ 3 \\ b_5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene solución única. $X = (4, -3, 2)^T$ donde C es la forma escalonada de A. Encontrar A y B.



21) El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

es un sistema consistente con infinitas soluciones de la forma $\{t, 2t+2, t\}$, $t \in \mathbb{R}$. Si

$$E_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es la forma escalonada de A

(a) Encontrar B.

(b) Calcular M^{-1}, si $M(A|B) = (E_A|E_B)$

Rpta:

(a) $B = (-2, -4, -2, -4)^T$

(b) $M^{-1} = F_{12}(2)F_{34}(2)F_{31}(1)F_{13}(3)F_{23}F_2(-1)$

22) Sea A una matriz de orden 3, donde

$$A^{-1} = F_{31}(-1)F_3\left(\frac{1}{1-a}\right)F_{21}(-2b)F_{23}(2ab-1)$$
$$F_2\left(-\frac{1}{b}\right)F_{13}(-a)F_{12}(-1)F_{13}$$

Si $AX = B$ donde $B = (4, 3, 4)^T$. Para qué valores de a y b el sistema de ecuaciones lineales tiene:

(a) Solución única. Calcular.

(a) Solución única. Calcular.

(b) Infinitas soluciones que dependen de 1 parámetro.

(c) Infinitas soluciones que dependen de 2 parámetros.

(d) Inconsistencia



23) Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, donde

$$(A|B) = F_2(\lambda-2)F_{21}(-\lambda)F_{23}(\lambda^2)F_{12}(1)$$

$$F_{13}(1)F_{32}(1)F_{23}(-\lambda^2-\lambda)\begin{pmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 & 2\lambda\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda & \lambda^2-\lambda\end{pmatrix}$$

para qué valores de λ el sistema tiene:

(a) Solución única. Calcular.

(b) Infinitas soluciones que dependen de 1 parámetro, de 2 parámetros.

(c) Inconsistencia.

Rpta: $|A| = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$

(a) $|A| \neq 0$ entonces la solución única es:
$S = \left\{0, \frac{2}{\lambda+1}, \frac{1-\lambda}{\lambda+1}\right\}$

(b) $\lambda = 0$ entonces $S = \{0, t+1, t\},\ t \in \mathbb{R}$
$\lambda = 2$ entonces $S = \{r+\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}r+\frac{7}{12}, r\},\ r \in \mathbb{R}$

(c) Inconsistente $\lambda = -1$

24) A es una matriz cuadrada de orden 3

$$A^{-1} = F_{21}(-\frac{a}{b})F_{32}(-\frac{b}{c})F_3(\frac{1}{2a})F_2(\frac{1}{c})F_{23}(\frac{a}{b})F_{23}F_{12}(-c)F_1(\frac{1}{b})$$

resolver el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ donde $B = (c, b, a)^T$ y $abc \neq 0$

25) Dadas las matrices A y C de orden 3, donde

$$A = F_{12}F_{13}(-\alpha)F_{32}(1)F_2(\frac{1}{\cdot})F_{21}(-1), \qquad \alpha \neq 0$$

$$|A^{-1}| = -1 \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3a-1 & 3a-7 & a-4 \\ 2a-2 & 4a & 2a+1 \\ 4a & 5a-8 & 2a-6 \end{pmatrix}$$



Resolver el sistema

$$(A^{-1} + C)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ a+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

indicando para que valores de a el sistema tiene:

(a) Solución única. Calcular.

(b) Infinitas soluciones.

(c) Inconsistencia

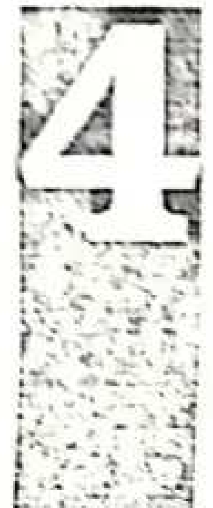
Rpta: $\alpha = 1,\ |M| = -a(a+2)$

(a) $|A| \neq 0$ entonces la solución única es:
$S = \{\frac{-3a^3-10a^2+10a-5}{-a(a+2)}, \frac{6a^3+3a^2+6a+35}{-a(a+2)}, \frac{-9a^3-19a^2+15a-7}{-a(a+2)}\}$

(b) Para ningún valor de a

(c) Inconsistente $a = 0,\ a = -2$

Capítulo



GEOMETRÍA ANALÍTICA VECTORIAL DEL ESPACIO

En este capítulo, nos ocuparemos de la geometría, debemos estar avisados que el álgebra lineal y la geometría son disciplinas que están bien relacionadas.

No debe sorprendernos, ni parecer exagerado si en esta parte volvemos a considerar como herramienta de trabajo fundamental el álgebra de vectores en el espacio que servirá para definir y abordar con precisión los conceptos de geometría como el punto, la recta, el plano y la distancia.

Para ello, es necesario establecer el sistema de coordenadas tridimensional, es decir el *espacio geométrico* como punto de partida para poder estudiar con propiedad y amplitud las relaciones y propiedades de estos elementos.

La idea de emplear pares de números reales para localizar puntos en el plano y ternas de números para localizar puntos en el espacio de tres dimensiones ha sido posible generalizar a espacios de dimensión superior.

4.1 Álgebra vectorial

Iniciaremos nuestro estudio con el álgebra de vectores, probablemente la primera

Iniciaremos nuestro estudio con el álgebra de vectores, probablemente la primera noción que tenemos de un vector es la idea de una entidad con una longitud y una dirección. A medida que avancemos, daremos una definición matemática precisa de un vector.



$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2)/x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

sus elementos son **pares ordenados** de números reales.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

sus elementos son **ternas ordenadas** de números reales.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

sus elementos son **n-adas** o **enuplas ordenadas** de números reales.

Notación

Los elementos de $\mathbb{R}^n$ se denotan por $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la sucesión de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman **coordenadas** de P o **componentes** de $\bar{x}$.

Definición 4.1

Sean las enuplas ordenadas $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se dice que $\bar{x}$ es **igual** a $\bar{y}$, se denota por $\bar{x} = \bar{y}$ si y solo si $x_i = y_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Definición 4.2

Sean las enuplas ordenadas $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ la suma de $\bar{x}$ e $\bar{y}$, denotada por $\bar{x} + \bar{y}$ es la siguiente enupla ordenada

la suma de $\bar{x}$ e $\bar{y}$, denotada por $\bar{x}+\bar{y}$ es la siguiente enupla ordenada

$$\bar{x}+\bar{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$$

(la operación se llama **adición** de enuplas ordenadas).



Definición 4.3

Dados el número real r y la enupla ordenada $\bar{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, se llama producto del escalar r por $\bar{x}$ a la siguiente enupla ordenada

$$r\bar{x}=(rx_1, rx_2, \dots, rx_n)$$

(La operación se llama **multiplicación** por un escalar)

Teorema 4.1

La adición de enuplas ordenadas, la multiplicación de escalares por enuplas ordenadas y la relación de igualdad definidas, satisfacen las siguientes propiedades

1) $\bar{x}+\bar{y}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$

2) $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x},\ \forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$

3) $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z},\ \forall\bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbb{R}^n$

4) Existe una única enupla $\bar{0}=(0,0,\dots,0)/\bar{0}+\bar{x}=\bar{x}+\bar{0}=\bar{0},\ \forall\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

5) $\forall\bar{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \exists-\bar{x}=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)/\bar{x}+(-\bar{x})=(-\bar{x})+\bar{x}=\bar{0}$

6) $r\bar{x}\in\mathbb{R}^n,\ \forall r\in\mathbb{R},\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n$

7) $r(\bar{x}+\bar{y})=r\bar{x}+r\bar{y},\ \forall r\in\mathbb{R},\ \forall\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$

8) $(r+t)\bar{x}=r\bar{x}+t\bar{x},\ \forall r,t\in\mathbb{R},\ \forall\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

9) $r(t\bar{x})=(rt)\bar{x}=(r\bar{x})t,\ \forall r,t\in\mathbb{R},\ \forall\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

10) $1\bar{x}=\bar{x},\ \forall\bar{x}\in\mathbb{R}^n$

Demostración. La prueba de este teorema es inmediata, puesto que es aplicación

directa de las definiciones dadas anteriormente. Sin embargo, demostraremos las propiedades 4 y 5.

La propiedad 4 nos asegura la existencia y unicidad del **elemento neutro** para la suma. En efecto:



Existencia: si $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ y $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{x} + \bar{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}$$

Similarmente $\bar{0} + \bar{x} = \bar{x}$. Por tanto,

$$\bar{x} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{x} = \bar{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

Unicidad: Sea $\bar{0}'$ otro elemento en $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\bar{x} + \bar{0}' = \bar{0}' + \bar{x} = \bar{x}, \ \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

como esta igualdad se cumple $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces en particular se verifica para $\bar{x} = \bar{0}$. En consecuencia

$$\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0} = \bar{0} \tag{4.2}$$

Similarmente para $\bar{x} = \bar{0}'$ en (4.1) se tiene

$$\bar{0}' + \bar{0} = \bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}' \tag{4.3}$$

Comparando (4.2) y (4.3), entonces $\bar{0} = \bar{0}'$

La propiedad 5 nos asegura la existencia y unicidad de elemento inverso aditivo. En efecto:

Existencia: Si $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Hagamos $-\bar{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, entonces

$$\begin{aligned} \bar{x} + (-\bar{x}) &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \ldots, x_n - x_n) \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$

Similarmente $(-\bar{x}) + (\bar{x}) = \bar{0}$. Por lo tanto,

$$\bar{x} + (-\bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{x} = \bar{0}$$



Unicidad: Sea $\bar{x}'$ otro elemento en $\mathbb{R}^n$ tal que $\bar{x} + \bar{x}' = \bar{x}' + \bar{x} = \bar{0}$

$$(-\bar{x}) + (\bar{x}' + \bar{x}) = (-\bar{x}) + \bar{0} = -\bar{x} \tag{4.4}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(-\bar{x}) + (\bar{x}' + \bar{x}) &= (-\bar{x}) + (\bar{x} + \bar{x}') \\ &= ((-\bar{x}) + \bar{x}) + \bar{x}' \\ &= \bar{0} + \bar{x}' = \bar{x}' \end{aligned} \tag{4.5}$$

De (4.4) y (4.5) se deduce que $-\bar{x} = \bar{x}'$

◇

Definición 4.4

A un conjunto no vacío V, provisto de una "relación de igualdad entre elementos de V", de las operaciones de "adición de elementos de V" y "multiplicación de números reales por elementos de V" y que satisfacen las 10 propiedades del teorema anterior se llama **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$. A los elementos de un espacio vectorial se les llama **vectores**.

Nota

1) Si los escalares utilizados en el teorema anterior son números reales se dirá **espacio vectorial sobre** $\mathbb{R}$. En otro caso, si los escalares utilizados son números complejos se llamará **espacio vectorial sobre** $\mathbb{C}$.

2) Cuando se habla de vector nos estamos refiriendo a un elemento de un espacio vectorial determinado.

Definición 4.5

El número de elementos necesarios para especificar un vector en un espacio vectorial W se llama **dimensión** del espacio.
Es decir, si los elementos de un espacio vectorial tienen n componentes, entonces se llama **espacio vectorial n-dimensional** y se denota por W_n.





Nota

El teorema anterior demuestra que $\mathbb{R}^n$ es un **espacio vectorial n-dimensional** sobre $\mathbb{R}$ y por tanto los elementos de $\mathbb{R}^n$ se llaman **vectores**.

Definición 4.6:

$$V_n = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_i \in \mathbb{R},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$$

es un **espacio vectorial n-dimensional** sobre $\mathbb{R}$ y sus elementos las enuplas ordenadas $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tienen todo el derecho de llamarse vectores. El número x_i se llama **i-ésima componente** del vector $\bar{x}$.

La propiedad 5 del teorema anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición 4.7

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores en V_n. La **diferencia** de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ denotada por $\bar{a} - \bar{b}$ es el siguiente vector

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$$

(La operación se llama **sustración de vectores**)

4.1.1 Sistema de coordenadas tridimensional

El uso de coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional da lugar a una interpretación geométrica conveniente de los puntos en $\mathbb{R}^3$. Para determinar estas coordenadas construimos un sistema de coordenadas tridimensional en la siguiente forma:

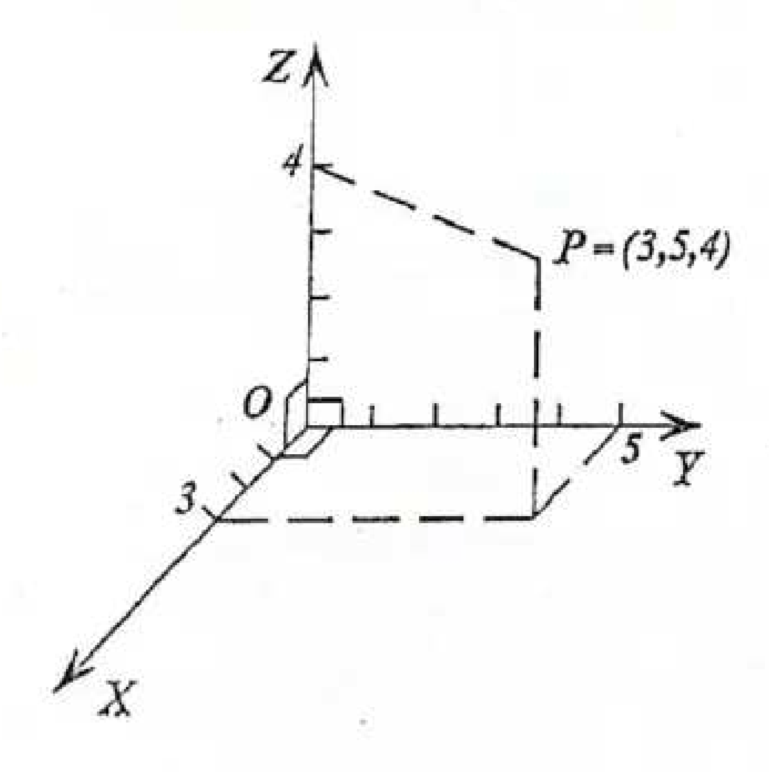
Se elige un punto O llamado **origen** y tres rectas numéricas mutuamente perpendiculares llamadas **ejes coordenados** X, Y, Z que pasan por el origen O, luego se fija una dirección positiva y una unidad de medida para cada uno de los ejes. Los ejes X e Y determinan un plano, el **plano** XY, los ejes X y Z determinan el **plano** XZ y los ejes Y y Z el **plano** YZ.

Si $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ entonces:

- x es la distancia dirigida (positiva o negativa) paralela al eje X del punto P al plano YZ
- y es la distancia dirigida (positiva o negativa) paralela al eje Y del punto P al plano XZ
- z es la distancia dirigida (positiva o negativa) paralela al eje Z del punto P al plano XY

Ejemplo 4.1

Ubicar un punto $P = (3, 5, 4)$ en un sistema de coordenadas tridimensional.





1) Los ejes Y y Z se consideran como contenidos en la página y el eje X como perpendicular a ella.

2) Las flechas en los ejes coordenados indican la dirección positiva de los ejes.

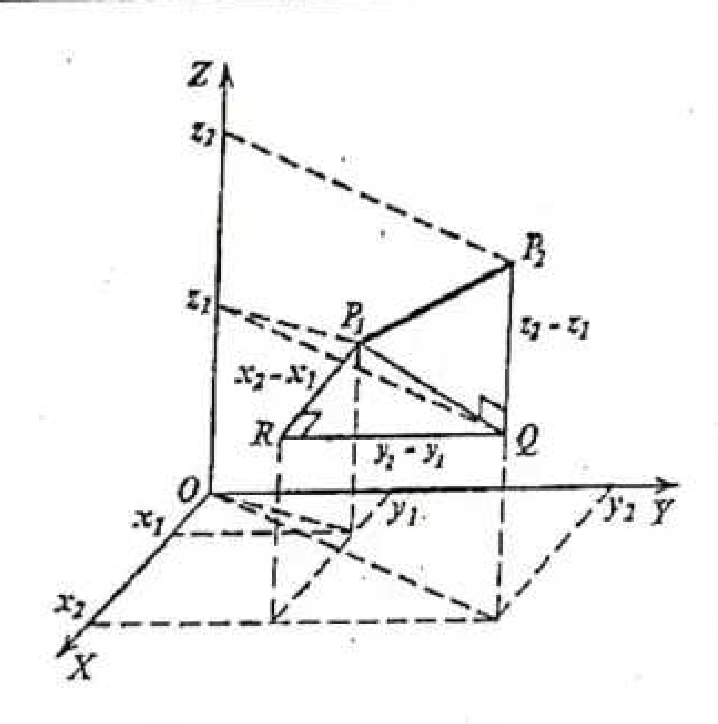
3) La distancia dirigida positiva se mide en la dirección de la flecha y la distancia dirigida negativa en sentido opuesto.



Definición 4.8

La distancia entre los puntos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ denotada por $d(P_1, P_2)$ es el siguiente número real

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



El $\triangle P_1RQ$ es recto, aplicamos el teorema de Pitágoras[1]

$$P_1Q = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

El $\triangle P_1QP_2$ es recto, aplicamos el teorema de Pitágoras

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = d(P_1, P_2)$$

4.1.2 Representación gráfica

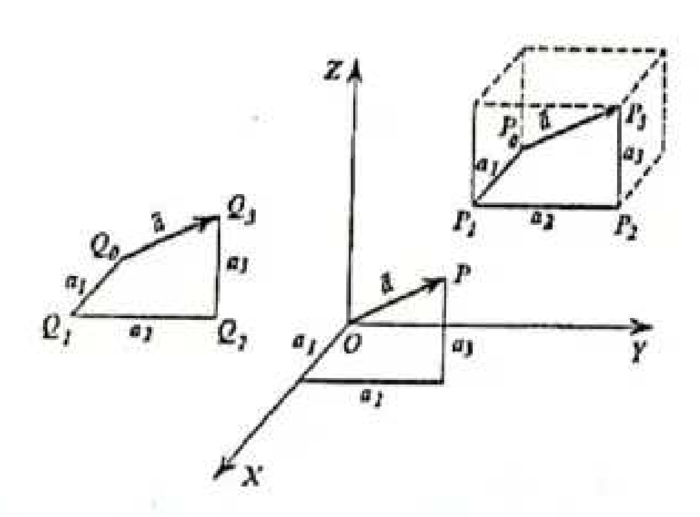
En V_2 y V_3 los vectores se representan por flechas o segmentos orientados. Es importante imaginar a un vector no como un punto, sino como una entidad que tiene una "dirección" y una "magnitud". Esta representación se emplea en física

[1]Pitágoras, filósofo y matemático griego (569–475 a. C.)

donde las flechas denotan fuerza, desplazamiento, velocidad y aceleración que son ejemplos de vectores.

4.1.2.1 Representación gráfica de un vector de V_3

El vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in V_3$ se representa gráficamente mediante **segmentos orientados** (flechas) en la siguiente forma:



En un sistema de coordenadas tridimensional, tomemos un punto arbitrario P_0, partiendo de P_0 recorremos paralelamente al eje X, en dirección positiva si $a_1 > 0$ y en dirección opuesta si $a_1 < 0$ una distancia igual a $|a_1|$ ubicando el punto P_1. Partiendo de P_1 recorremos paralelamente al eje Y hacia la derecha si $a_2 > 0$ o hacia la izquierda si $a_2 < 0$ una distancia igual a $|a_2|$ ubicando el punto P_2. Partiendo de P_2 recorremos paralelamente al eje Z, hacia arriba si $a_3 > 0$ o hacia abajo si $a_3 < 0$ una distancia igual a $|a_3|$ ubicando el punto P_3.

La flecha cuyo punto inicial es P_0 y cuyo final es P_3 representa al vector $\bar{a}$.

P_0 se llama **punto inicial** del vector $\bar{a}$

P_3 se llama **punto terminal** del vector $\bar{a}$

Si $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ entonces

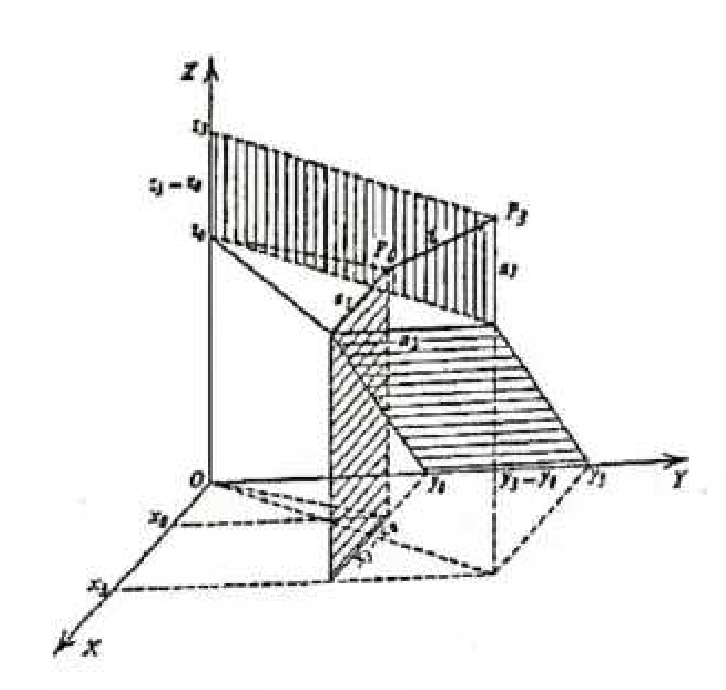
$$a_1 = x_3 - x_0$$

$$a_2 = y_3 - y_0$$



$$a_3 = z_3 - z_0$$

Luego $\bar{a} = P_3 - P_0 = \overrightarrow{P_0P_3}$



El punto P_0 fue elegido arbitrariamente, si tomamos otro punto Q_0 siguiendo los mismos pasos anteriores encontraremos otro punto terminal Q_3. La flecha con punto inicial Q_0 y punto terminal Q_3 también representa al vector $\bar{a} = Q_3 - Q_0 = \overrightarrow{Q_0Q_3}$.

En conclusión, un vector $\bar{a}$ está representado por infinitas flechas (las cuales tienen la propiedad de ser paralelas, además de tener la misma longitud y sentido); pero una flecha representa a un único vector.

Nota

1) Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in V_3$, entonces $\bar{a}$ representa gráficamente la diagonal del paralelepípedo recto cuyas aristas paralelas a los ejes coordenados X, Y y Z miden a_1, a_2 y a_3 respectivamente.

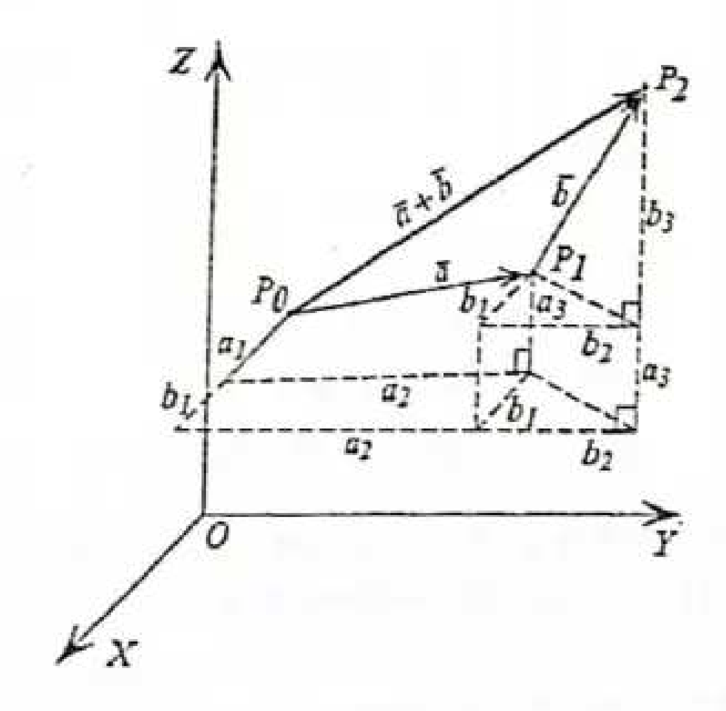
2) En particular, si para representar al vector $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ tomamos como punto inicial el origen de coordenadas $O = (0, 0, 0)$ entonces el punto terminal P de la flecha que representa a $\bar{a}$ tiene por coordenadas las mismas componentes de $\bar{a}$, a esta flecha se le llama la **representación estándar** de $\bar{a}$,

radio vector o vector posición. Es decir

$$\bar{a} = \overrightarrow{OP} = P - O = P$$

4.1.2.2 Representación gráfica de la suma de vectores

Sean los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ en V_3 para construir una flecha que represente al vector $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ procedemos de la siguiente manera:

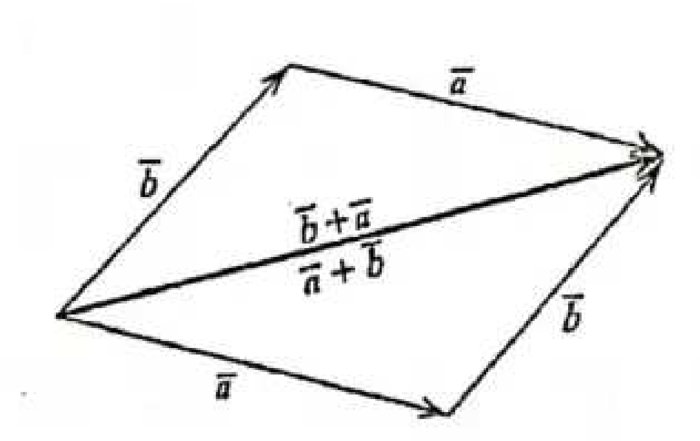


Tomemos un punto inicial P_0 cualquiera. Partiendo de P_0 construimos la flecha que representa a $\bar{a}$ cuyo punto terminal es P_1, partiendo de P_1 construimos la flecha que representa al vector $\bar{b}$, si el punto terminal de $\bar{b}$ es P_2, entonces la flecha con punto inicial P_0 y punto terminal P_2 es la que representa al vector $\bar{a} + \bar{b}$.

Puesto que $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$, usando el procedimiento anterior graficamos la flecha

que representa a $\bar{a}+\bar{b}$ y con el mismo punto inicial construimos la flecha que representa a $\bar{b}+\bar{a}$, graficando primero la flecha $\bar{b}$ y luego la flecha que representa a $\bar{a}$. Observamos que ambas construcciones forman un paralelogramo que tiene como lados las flechas que representan a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$ y como una de sus diagonales la flecha que representa $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$, como se muestra en la siguiente figura



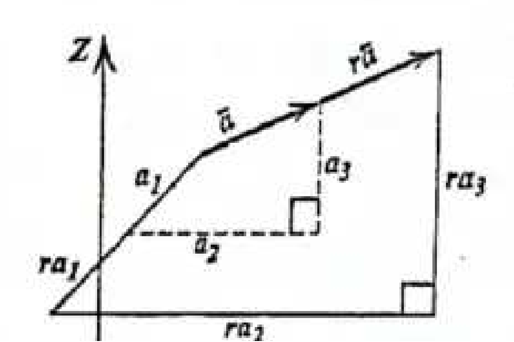


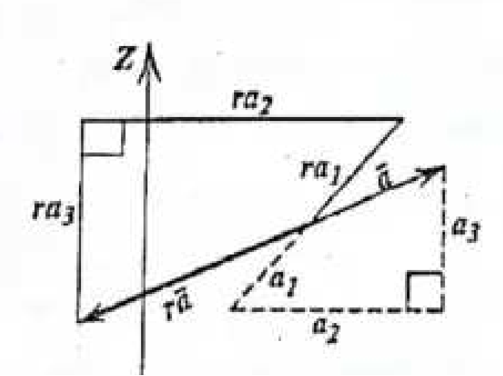
4.1.2.3 Representación gráfica del producto de un número real por un vector

Si $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)\in V_3$ y $r\in\mathbb{R}$ entonces $r\bar{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$

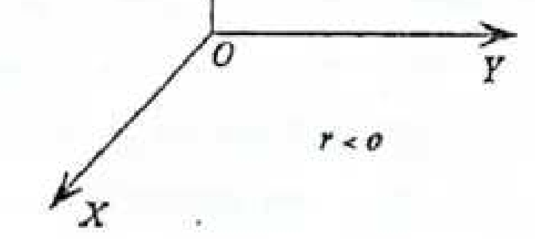
Si $r>0$ entonces ra_1, ra_2 y ra_3 tiene el mismo signo que a_1, a_2 y a_3 respectivamente

Si $r<0$ entonces ra_1, ra_2 y ra_3 tienen signos opuestos a a_1, a_2 y a_3 respectivamente



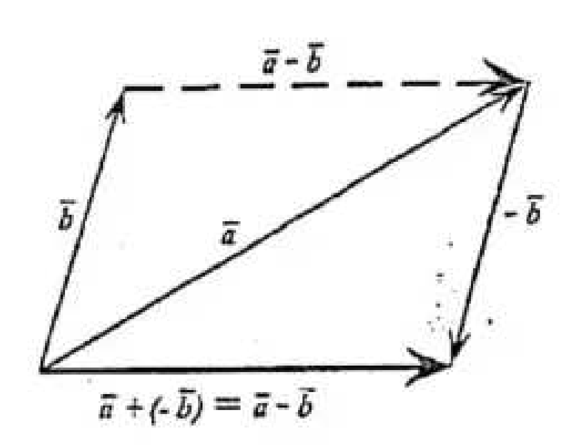


O Y X $r > 0$



4.1.2.4 Representación gráfica de la diferencia de vectores

Si $\bar{b} \in V_3$ y $r = -1$ entonces $r\bar{b} = (-1)\bar{b} = -\bar{b}$. Luego la flecha que representa a la diferencia de dos vectores $\bar{a} - \bar{b}$ es la flecha que representa a $\bar{a} + (-\bar{b})$ como se muestra en la siguiente figura



4.1.3 Vectores paralelos

Para los vectores de V_n se utiliza la misma terminología que se emplea para los vectores en V_2 y V_3.

Definición 4.9

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores en V_n. Se dice que $\bar{a}$ es paralelo a $\bar{b}$ y se escribe $\bar{a} \parallel \bar{b}$, si existe un número real r tal que $\bar{a} = r\bar{b}$. En caso contrario se dice que $\bar{a}$ no es paralelo a $\bar{b}$ y se escribe $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

Es decir

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Longleftrightarrow \exists r \in \mathbb{R} / \bar{a} = r\bar{b}.$$

Ejemplo

Si $\bar{a} = (3, -1, 2)$, $\bar{b} = (-15, 5, -10) \in V_3$

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \text{ puesto que } \bar{a} = -\frac{1}{5}\bar{b}$$



Ejemplo 4.3

Si $\bar{a} = (-1, 4, 3)$, $\bar{b} = (2, 0, -3)$. Averiguar si los vectores son paralelos.

Si $\bar{a} \parallel \bar{b}$, debemos encontrar $r \in \mathbb{R} / \bar{a} = r\bar{b}$

$$(-1, 4, 3) = r(2, 0, -3) \Longrightarrow \begin{cases} -1 = 2r \\ 4 = 0 \\ 3 = -3r \end{cases} \quad \text{contradicción}$$

$$\nexists r \in \mathbb{R} / \bar{a} = r\bar{b} \Longrightarrow \bar{a} \nparallel \bar{b}$$

Ejemplo 4.4

El vector cero es paralelo a todo vector. Es decir $\bar{0} \parallel \bar{a}$, $\forall \bar{a} \in V_n$, puesto que $\bar{0} = 0\bar{a}$

Propiedades

$\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_n$

1) $\bar{a} \parallel \bar{a}$ (propiedad reflexiva)

2) $\bar{a} \parallel \bar{b} \Longleftrightarrow \bar{b} \parallel \bar{a}$ (propiedad simétrica)

3) Si $\bar{a} \parallel \bar{b}$, $\bar{b} \parallel \bar{c}$ y $\bar{b} \neq \bar{0} \Longrightarrow \bar{a} \parallel \bar{c}$ (propiedad transitiva)

La demostración de estas propiedades es inmediata. Nótese que en la propiedad 3 existe una restricción para $\bar{b}$. Si $\bar{b} = \bar{0}$, entonces no necesariamente se cumple la propiedad.

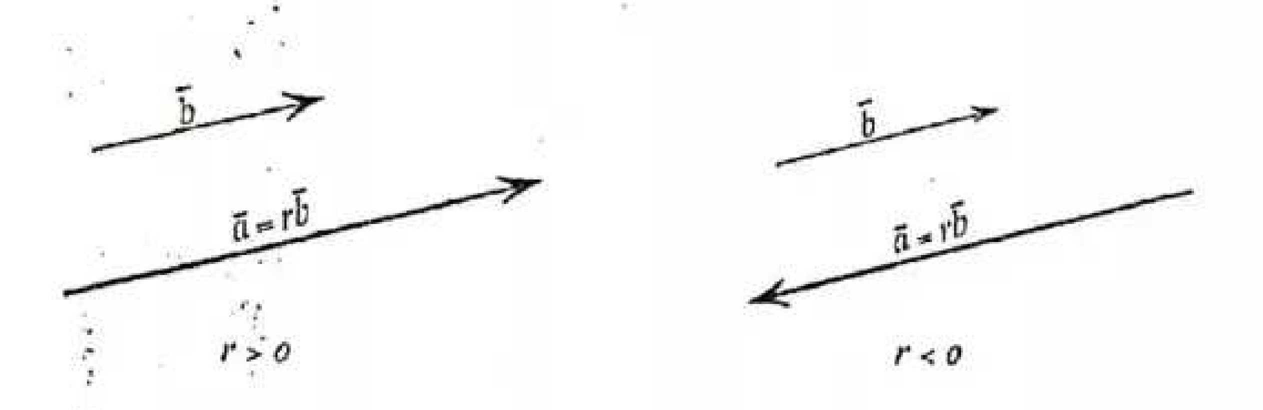


Si los vectores $\bar{a} \neq \bar{0}$ y $\bar{b} \neq \bar{0}$ son paralelos, es decir, si existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

Si los vectores $\bar{a} \neq 0$ y $\bar{b} \neq 0$ son paralelos, es decir,
$\bar{a} = r\bar{b}$, decimos que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tiene el mismo sentido si $r > 0$ y sentidos opuestos si $r < 0$.



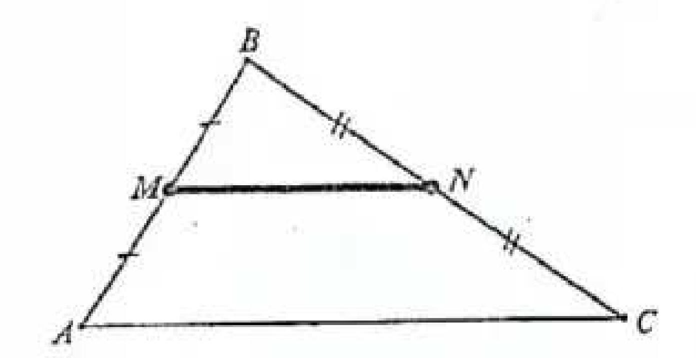




Ejercicio 4.1: Teorema de los puntos medios

Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de cualesquiera dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de la longitud del tercer lado (llamada también *Propiedad de la base media de un triángulo*)

Solución.



En un $\triangle ABC$, sean M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Igualando (4.6) y (4.7)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$



$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

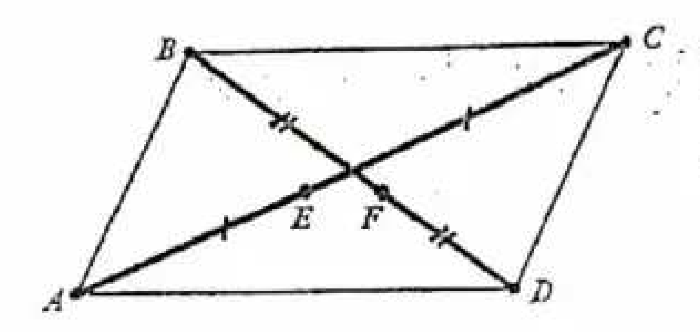
entonces

$$\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AC} \text{ y } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$$



Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí

Solución.



Sea el paralelogramo $ABCD$ cuyas diagonales son $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente donde

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$$

Si E y F puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Entonces

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \qquad (4.8)$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \qquad (4.9)$$

De (4.8) y (4.9)

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$$



$$E - A = F - A$$

entonces $E = F$.

Por tanto, las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio.

Nota

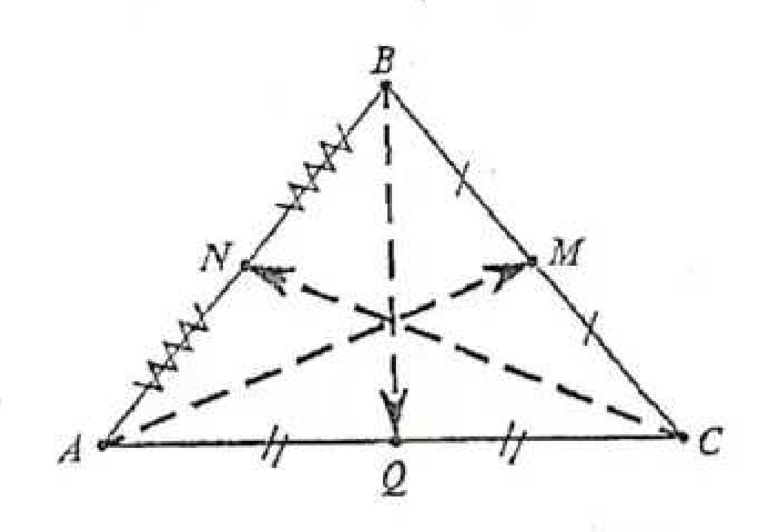
Una consecuencia inmediata de este ejercicio es que: si $P = E = F$ en la figura anterior, entonces en (4.8)

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

Ejercicio 4.3

Demostrar que la suma de las medianas de un triángulo es cero.

Solución.



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

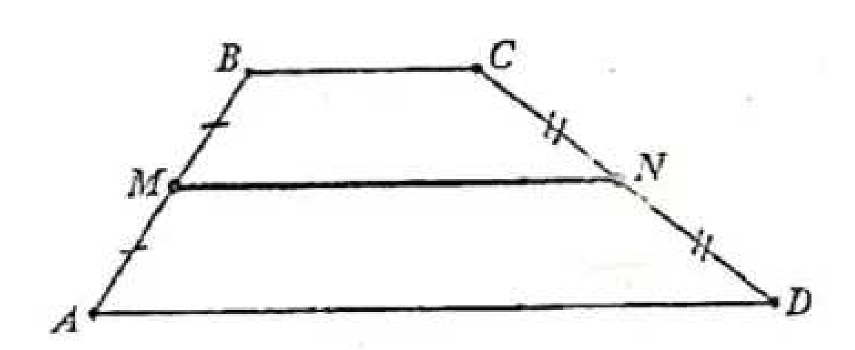
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CN} = \bar{0}$$



Ejercicio 4.4

Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases e igual a la semisuma de las bases.

Solución.



En el trapecio $ABCD$, sean M y N puntos medios de los lados no paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Entonces

$$\triangle ACD: \quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \qquad (4.10)$$

$$\triangle AMN: \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} \qquad (4.11)$$

De (4.10) y (4.11)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

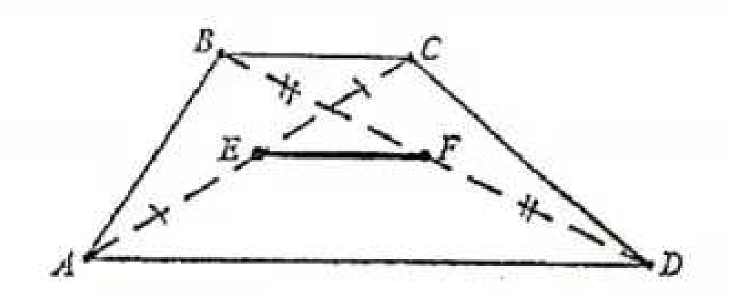
y $\overrightarrow{MN}$ paralelo a las bases.

Ejercicio 4.5

Demostrar que el segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es paralelo a las bases e igual a la semidiferencia de las bases.



Solución.



En el trapecio $ABCD$, sean E y F puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Entonces

$$\triangle ABD: \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$\triangle ABC: \quad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$$

y $\overrightarrow{EF}$ es paralelo a las bases.

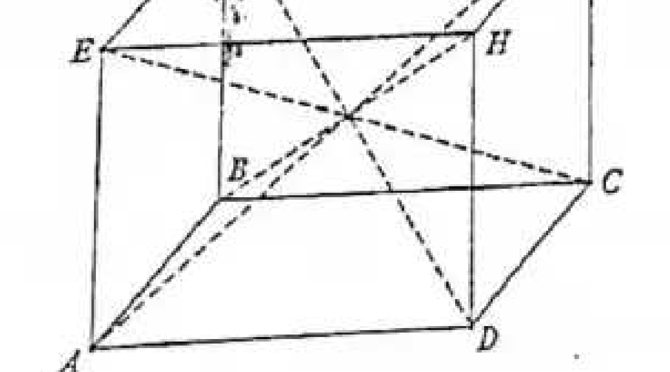


Ejercicio 4.6

Demostrar que las diagonales de un paralelepípedo se bisecan entre sí

Solución.







En el paralelepípedo $ABCD - EFGH$ con aristas $\overline{BA}, \overline{BC}$ y $\overline{BF}$. Sean las diagonales $\overline{AG}, \overline{BH}, \overline{CE}$ y $\overline{DF}$ y M, N, Q y R puntos medios de $\overline{AG}, \overline{BH}, \overline{CE}$ y $\overline{DF}$ respectivamente. Entonces si M es punto medio de $\overrightarrow{AG}$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}) \qquad (4.12)$$

En $\triangle ABH$, si N es punto medio $\overline{BH}$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH})$$
$$= \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}) \qquad (4.13)$$

De (4.12) y (4.13)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} \Longrightarrow M = N$$

En $\triangle ACE$, si Q es punto medio de $\overline{CE}$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \qquad (4.14)$$

De (4.12) y (4.14)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AQ} \Longrightarrow M = Q$$

En $\triangle ADF$, si R es punto medio de $\overline{DF}$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF})$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF}) \qquad (4.15)$$

De (4.12) y (4.15)

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AR} \Longrightarrow M = R$$

Por lo tanto, $M = N = Q = R$, entonces las diagonales del paralelepípedo se intersecan en su punto medio.





4.1.4 Producto escalar y norma

Para que los vectores sean un instrumento geométrico útil deben describir conceptos fundamentales de manera sencilla. El producto escalar de vectores explica fácilmente dos de ellos: longitud y ángulo.

Definición 4.10

Sean $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vectores en V_n se llama producto escalar de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y se denota por $\bar{a} \cdot \bar{b}$, al siguiente número real

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Ejemplo 4.5

Si $\bar{a} = (1, -2, 3)$ y $\bar{b} = (3, 4, -5) \in V_3$ entonces

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (1)3 + (-2)4 + 3(-5) = -20$$

Propiedades

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n$.

2) $(r\bar{a}) \cdot \bar{b} = r(\bar{a} \cdot \bar{b}) = \bar{a} \cdot (r\bar{b}); \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \bar{a}, \bar{b} \in V_n$

3) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}; \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V_n$

4) $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0, \quad \forall \bar{a} \in V_n$

5) $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$

La demostración de estas propiedades es aplicación directa de la definición.



El producto escalar definido para vectores de $\mathbb{R}^n$ se llama **producto interior euclidiano.**





Definición 4.11

Se llama **norma** de un vector $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V_n$ y se denota por $|\bar{a}|$ al siguiente número real

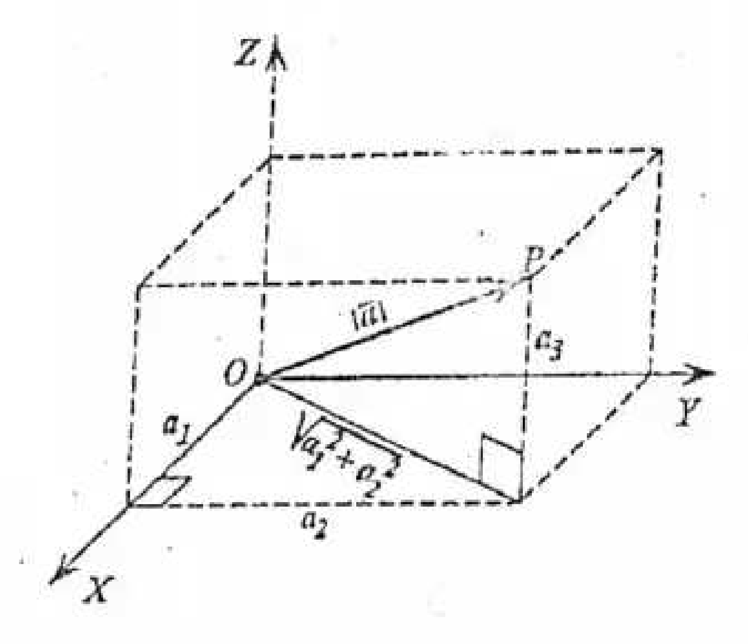
$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}$$

Ejemplo 4.6

Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in V_3$

Solución.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Geométricamente se interpretó al vector $\bar{a}$ como una flecha en el espacio que representa a la diagonal del paralelepípedo rectangular con aristas a_1, a_2 y a_3. La norma de $\bar{a}$, es la longitud de la diagonal $\overrightarrow{OP}$. Es decir, la *norma* significa *longitud* del vector.

Propiedades

1) $|\bar{a}| \geq 0, \ \forall \bar{a} \in V_n$

2) $|\bar{a}| = 0 \Longleftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$



3) $|r\bar{a}| = |r||\bar{a}|, \ \forall r \in \mathbb{R}, \ \forall \bar{a} \in V_n$

4) $|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|, \ \bar{a}, \bar{b} \in V_n$ (Desigualdad de Minkowski[2] o desigualdad triangular)

Demostración. 1) Por definición $|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ entonces

$$|\bar{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

Si $a_i \neq 0$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$ entonces

$$|\bar{a}|^2 > 0 \Longrightarrow |\bar{a}| > 0$$

Por tanto $|\bar{a}| \geq 0, \ \forall \bar{a} \in V_n$

2) ($\Longrightarrow$) Si $|\bar{a}| = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ luego

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}$$

($\Longleftarrow$) Si $\bar{a} = \bar{0}$ entonces $|\bar{a}| = 0$

3)

$$\begin{aligned} |r\bar{a}| = |(ra_1, ra_2, \ldots, ra_n)| &= \sqrt{(ra_1)^2 + (ra_2)^2 + \cdots + (ra_n)^2} \\ &= \sqrt{r^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)} \\ &= \sqrt{r^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \\ &= |r||\bar{a}| \end{aligned}$$



Las barras en $|r|$ significan valor absoluto y en $|\bar{a}|$ norma o longitud.

4) La propiedad (4) es la desigualdad del triángulo que afirma que la longitud de un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

[2]Hermann Minkowski, matemático alemán (1864–1909)





La demostración de esta propiedad se basa en la siguiente desigualdad:

Desigualdad de Cauchy-Schwarz[3]

$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n \quad |\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$ y se cumple la igualdad cuando $\bar{a} \parallel \bar{b}$

La demostración de esta desigualdad la ilustraremos más adelante (ver Teorema 4.3)

Asumiendo por el momento, como válida esta desigualdad, podemos afirmar lo siguiente

$$\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} \leq |\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}| \tag{4.16}$$

Luego demostraremos la Desigualdad Triangular

$$\begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \\ &= \bar{a} \cdot \bar{a} + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b} \cdot \bar{b} \\ &\leq |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}||\bar{b}| + |\bar{b}|^2 \text{aplicando (4.16)} \\ &= (|\bar{a}| + |\bar{b}|)^2 \end{aligned}$$

Por tanto

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$$





1) Se cumple la igualdad si $\bar{a} = \bar{0}$ y $\bar{b} = \bar{0}$ y también cuando $\bar{a}$ y $\bar{b}$ están en la misma dirección y sentido.

2) La Desigualdad Triangular puede expresarse de la siguiente manera

Si $\bar{a} = (a_{1,2}, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son vectores en V_n, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

[3]Augustin Louis Cauchy, matemático francés (1789–1857).
Hermann Amandus Schwarz, matemático alemán (1843–1921)





Definición 4.12

Un vector $\bar{a} \in V_n$ se llama vector unitario si $|\bar{a}| = 1$. Si $\bar{b} \in V_n$ es un vector no nulo cualquiera, entonces $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ es un vector unitario que tiene el mismo sentido que $\bar{b}$, se denota por $\bar{u} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Ejemplo 4.7

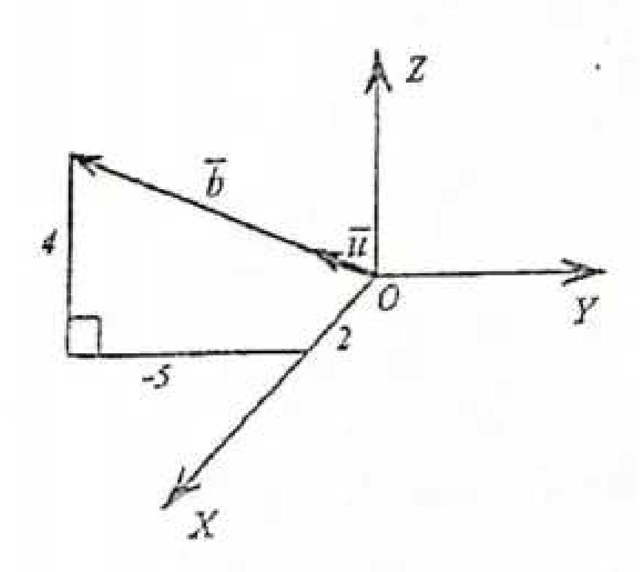
$i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ son vectores unitarios en la dirección positiva de los ejes coordenados X, Y y Z respectivamente.

Ejemplo 4.8

Sea $\bar{b} = (2, -5, 4)$, entonces el vector unitario en la misma dirección y sentido que $\bar{b}$ es

$$\bar{u} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2, -5, 4)$$

puesto que $|\bar{u}| = 1$.



Definición 4.13

Si P_1 y P_2 son puntos de $\mathbb{R}^n$, la distancia de P_1 a P_2, denotada por $d(P_1, P_2)$ es la longitud del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Es decir:

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1P_2}| = |P_2 - P_1|$$



Nota

De acuerdo a la definición, la distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$, tiene las mismas propiedades que la norma de un vector. En efecto, $\forall P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^n$.

1) $d(P_1, P_2) \geq 0$

2) $d(P_1, P_2) = 0 \iff P_1 = P_2$

3) $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$

4) $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$

Ejercicio 4.7

Demostrar que

$$\big||\bar{a}| - |\bar{b}|\big| \leq |\bar{a} - \bar{b}|, \ \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n$$

Solución.

Se sabe que

$$|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|, \ \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n \tag{4.17}$$

1) Si $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}, \ \bar{y} = \bar{b}$. En (4.17)

$$|(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{b}| + |\bar{b}|$$

$$|\bar{a}| \leq |\bar{a} - \bar{b}| + |\bar{b}|$$

entonces

$$|\bar{a}| - |\bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{b}| \tag{4.18}$$

2) Si $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}, \ \bar{y} = -\bar{a}$. En (4.17)

$$|(\bar{a} - \bar{b}) + (-\bar{a})| \leq |\bar{a} - \bar{b}| + |-\bar{a}|$$

$$|-\bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{b}| + |-\bar{a}|$$

Entonces

$$|\bar{b}| - |\bar{a}| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$$
$$|\bar{a}| - |\bar{b}| \geq -|\bar{a} - \bar{b}| \qquad (4.19)$$



De (4.18) y (4.19)

$$-|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a}| - |\bar{b}| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$$
$$\big||\bar{a}| - |\bar{b}|\big| \leq |\bar{a} - \bar{b}|$$

Ejercicio 4.8

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\} \subset V_3$ donde $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{c} = \bar{a}\cdot\bar{d} = \bar{b}\cdot\bar{c} = 0$, $\bar{d}\cdot\bar{b} = -\bar{d}\cdot\bar{c}$, $|\bar{d}+\bar{b}+\bar{c}| = |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|$, $|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}||\bar{a} - \bar{d}| = |\bar{a}||\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + k\bar{d}|$, $|\bar{b} + \bar{c}| = 4|\bar{d}|$.
Calcular el valor de k.

Solución.
En efecto,

$$|\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}|^2 = |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2$$

entonces

$$(\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$$
$$|\bar{d}|^2 + 2\bar{d} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) + |\bar{b} + \bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) + |\bar{b} + \bar{c}|^2$$
$$|\bar{d}|^2 = |\bar{a}|^2$$

$$|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 |\bar{a} - \bar{d}|^2 = |\bar{a}|^2 |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + k\bar{d}|^2$$
$$((\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}))((\bar{a} - \bar{d}) \cdot (\bar{a} - \bar{d})) =$$
$$|\bar{a}|^2 (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + k\bar{d}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + k\bar{d})$$
$$(|\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) + |\bar{b} + \bar{c}|^2)(|\bar{a}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{d} + |\bar{d}|^2) =$$
$$|\bar{a}|^2 (|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 + 2k(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot \bar{d} + k^2 |\bar{d}|^2)$$

$$(|\bar{a}|^2 + |\bar{b} + \bar{c}|^2)(|\bar{a}|^2 + |\bar{d}|^2) = |\bar{d}|^2(|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 + k^2|\bar{d}|^2)$$

Sabemos que $|\bar{b} + \bar{c}| = 4|\bar{d}|$ y $|\bar{d}|^2 = |\bar{a}|^2$

$$(|\bar{a}|^2 + 16|\bar{d}|^2)(2|\bar{d}|^2) = |\bar{d}|^2(|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 + k^2|\bar{d}|^2)$$

$$34|\bar{d}|^2 = |\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 + k^2|\bar{d}|^2 \qquad (4.20)$$



Tenemos

$$
\begin{aligned}
|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}| &= |\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}| \\
|\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}|^2 &= |\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}|^2 \\
&= (\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{d} + \bar{b} + \bar{c}) \\
&= |\bar{d}|^2 + 2\bar{d} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) + |\bar{b} + \bar{c}|^2 \\
&= |\bar{d}|^2 + |\bar{b} + \bar{c}|^2 \\
&= |\bar{d}|^2 + 16|\bar{d}|^2 \\
&= 17|\bar{d}|^2
\end{aligned}
$$

En (4.20)

$$
\begin{aligned}
34|\bar{d}|^2 &= 17|\bar{d}|^2 + k^2|\bar{d}|^2 \\
17|\bar{d}|^2 &= k^2|\bar{d}|^2
\end{aligned}
$$

entonces

$$k^2 = 17 \Longrightarrow k = \pm\sqrt{17}$$

Ejercicio 19

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\} \subset V_n$ son vectores no nulos donde $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = |\bar{d}|$, $(\bar{a}+\bar{c})\cdot\bar{d} = (\bar{a}+\bar{c})\cdot\bar{b}$, $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{d}\cdot(\bar{b}+\bar{c})$, $(\bar{a}+\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{d}) = 8$. Hallar $(\bar{c}+\bar{b})\cdot(\bar{d}+\bar{b})$

Solución.

$$(\bar{a} + \bar{d}) \cdot (\bar{a} + \bar{c}) = |\bar{a}|^2 + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{d} \cdot \bar{a} + \bar{d} \cdot \bar{c} = 8 \qquad (4.21)$$

dato

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{d} &= (\bar{a} + \bar{c}) \cdot \bar{b} \\
\bar{a} \cdot \bar{d} + \bar{c} \cdot \bar{d} &= \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b}
\end{aligned}
$$

En (4.21)

$$|\bar{a}|^2 + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b} = 8$$

$|\bar{a}|^2 = |\bar{c}|^2$ entonces

$$|\bar{c}|^2 + \bar{c} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{a} \cdot \bar{b} = 8 \tag{4.22}$$





dato

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{d} \cdot (\bar{b} + \bar{c})$$
$$\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{c}$$

En (4.22)

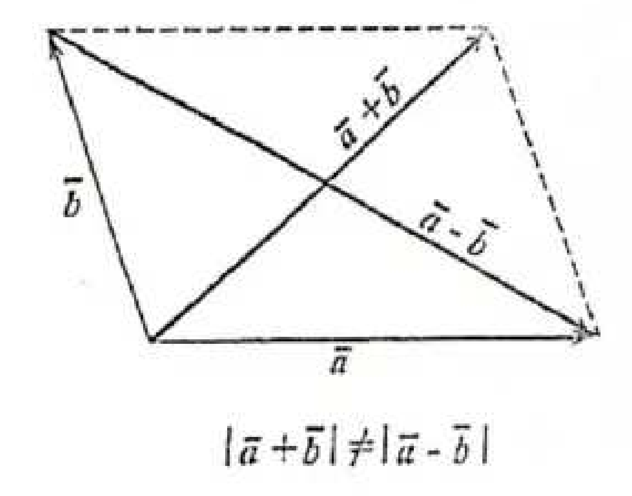
$$|\bar{c}|^2 + \bar{c} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{c} = 8 \tag{4.23}$$

$|\bar{c}|^2 = |\bar{b}|^2$ entonces

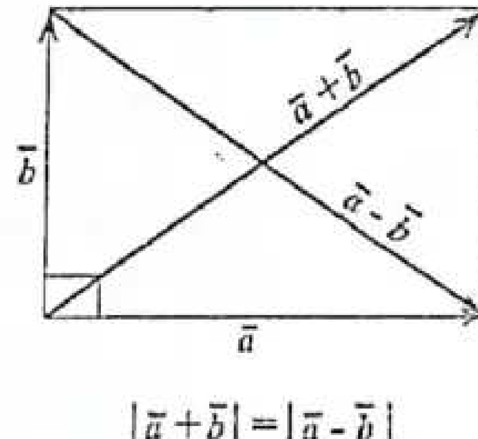
$$|\bar{b}|^2 + \bar{c} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{c} = 8$$
$$\bar{b} \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{b} + \bar{d} \cdot \bar{c} = 8$$
$$\bar{b} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) + \bar{d} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = 8$$
$$(\bar{b} + \bar{d}) \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = 8$$

4.1.5 Vectores ortogonales

Se motiva este concepto, con la siguiente interpretación geométrica en V_3: Sean los vectores no nulos y no paralelos $\bar{a}$ y $\bar{b}$, construimos un paralelogramo con lados $\bar{a}$ y $\bar{b}$



$|\bar{a}+\bar{b}| \neq |\bar{a}-\bar{b}|$



$|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$

En la Figura de la derecha los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales. "Ortogonal" significa "en ángulo recto" y es sinónimo de "perpendicular", por tanto daremos la siguiente definición.



Definición 4.14

Se dice que un vector $\bar{a}$ es **ortogonal** a un vector $\bar{b}$ y se escribe $\bar{a} \perp \bar{b}$, si $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$

Nota:

Como $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{b}+\bar{a}|$ y $|\bar{a}-\bar{b}| = |\bar{b}-\bar{a}|$ entonces

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Longrightarrow \bar{b} \perp \bar{a},$$

por eso se dice que los vectores son **mutuamente ortogonales** o que "$\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales".

Ejemplo 4.9

1) Averiguar si los vectores $\bar{a} = (3, 2, -1)$ y $\bar{b} = (5, -7, 1)$ son ortogonales.

$$\bar{a}+\bar{b} = (8, -5, 0) \Longrightarrow |\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{64+25} = \sqrt{89}$$
$$\bar{a}-\bar{b} = (-2, 9, -2) \Longrightarrow |\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{4+81+4} = \sqrt{89}$$

entonces $\bar{a} \perp \bar{b}$ puesto que $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{a}-\bar{b}|$.

2) ¿Son ortogonales los vectores $\bar{a} = (7, -1, 3)$ y $\bar{b} = (4, 3, -7)$?

$$\bar{a}+\bar{b} = (11, 2, -4) \Longrightarrow |\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{121+4+16} = \sqrt{141}$$
$$\bar{a}-\bar{b} = (3, -4, 10) \Longrightarrow |\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{9+16+100} = \sqrt{125}$$

$|\bar{a}+\bar{b}| \neq |\bar{a}-\bar{b}| \Longrightarrow \bar{a} \not\perp \bar{b}$

3) El vector $\bar{0}$ es ortogonal a todo vector $\bar{a} \in V_n$

$$\bar{0}+\bar{a}=\bar{a} \Longrightarrow |\bar{0}+\bar{a}|=|\bar{a}|$$
$$\bar{0}-\bar{a}=-\bar{a} \Longrightarrow |\bar{0}-\bar{a}|=|-\bar{a}|=|\bar{a}|$$

por lo tanto $\bar{0} \perp \bar{a},\ \forall \bar{a} \in V_n$



4)

$$\begin{aligned}|\bar{a}-\bar{b}|^2-|\bar{a}-\bar{b}|^2 &= (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})-(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})\\ &= |\bar{a}|^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+|\bar{b}|^2-(|\bar{a}|^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+|\bar{b}|^2)\\ &= 4(\bar{a}\cdot\bar{b})\end{aligned}$$

Si $|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}-\bar{b}|^2=0$, entonces

$$|\bar{a}+\bar{b}|=|\bar{a}-\bar{b}| \Longrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$$

pero $|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}-\bar{b}|^2=0$, entonces

$$4(\bar{a}\cdot\bar{b})=0 \Longleftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

Este resultado nos permite dar la siguiente definición

Definición 4.15

$$\bar{a}\perp\bar{b} \Longleftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=0$$

Nota

El uso de esta definición para averiguar si dos vectores son ortogonales es de aplicación muy práctica. Veamos

En el Ejemplo 4.9(1)

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(3,2,-1)\cdot(5,-7,1)=15-14-1=0 \Longrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$$

En el Ejemplo 4.9(2)

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(7,-1,3)\cdot(4,2,-7)=28-2-21=4\neq 0 \Longrightarrow \bar{a}\not\perp\bar{b}$$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = (7, -1, 3) \cdot (4, 3, -7) = 28 - 3 - 21 = 4 \neq 0 \Longrightarrow \bar{a} \not\perp \bar{b}$

Teorema 4.2 (Teorema de Pitágoras)

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Longleftrightarrow |\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2$$



Demostración. $(\Longleftarrow)$ Si $|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \Longrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$

$$\begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \\ &= |\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 \\ &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \\ &\Longleftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Longrightarrow \bar{a} \perp \bar{b} \end{aligned}$$

$(\Longrightarrow)$ Si $\bar{a} \perp \bar{b} \Longrightarrow |\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2$

$$\begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 \\ &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 \end{aligned}$$

puesto que $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ por hipótesis. ◊

Ejercicio 4.10

Encontrar todos los vectores ortogonales a

1) $(1, 0, 0)$ y $(0, \bar{1}, 0)$

2) $(1, 2, -1)$ y $(0, 0, 1)$

3) $(3, -1, 4)$

Solución.

1) Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$ tal que

$$\bar{x} \cdot (1, 0, 0) \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$$
$$\bar{x} \cdot (0, 1, 0) = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Longrightarrow x_2 = 0$$

entonces $\bar{x} = (0, 0, x_3)$, luego $\bar{x} = r(0, 0, 1)$, $\forall r \in \mathbb{R}$

2) Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$ tal que

$$\bar{x} \cdot (1, 2, -1) \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \cdot (1, 2, -1) = 0 \Longrightarrow x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\bar{x} \cdot (0, 0, 1) = 0 \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Longrightarrow x_3 = 0$$



Se tiene un sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2 < n \Longrightarrow \exists n - 2 = 1$$

incógnita arbitraria

$$S = \{-2t, t, 0\},\ t \in \mathbb{R}$$
$$\therefore \bar{x} = t(-2, 1, 0), t \in \mathbb{R}$$

3) Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$ tal que $\bar{x} \cdot (3, -1, 4) = 0$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (3, -1, 4) = 0 \Longrightarrow 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

se trata de una ecuación con tres incógnitas $x_1 = t, x_3 = r, x_2 = 3x_1 + 4x_2 = 3t + 4r$

$$S = \{t, 3t + 4r, r\}, \quad r, t \in \mathbb{R}$$
$$\bar{x} = \{t, 3t + 4r, r\}, \quad t, r \in \mathbb{R}$$

es decir, la solución depende de dos parámetros.

Ejercicio 4.11

Dados $\bar{a} = (3, -1, 5)$ y $\bar{b} = (1, 2, -3)$. Determinar el vector $\bar{x}$ que es ortogonal al eje Y^+ y satisface la condición que $\bar{x} \cdot \bar{a} = 9$ y $\bar{x} \cdot \bar{b} = -4$

Solución.

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$ entonces

$$\bar{x} \cdot \bar{a} = 9 \Longrightarrow 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 9$$

$$\bar{x} \cdot \bar{b} = -4 \Longrightarrow x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4$$

$$\bar{x} \cdot (0,1,0) = 0 \Longrightarrow x_2 = 0$$

Se tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz aumentada es



$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$$\Longrightarrow r(E_A|E_B) = 3 = n$$

entonces S.E.L. tiene solución única

$$\bar{x} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$$

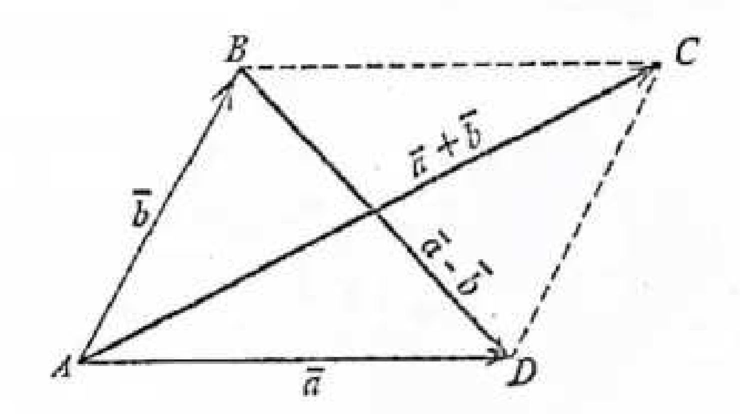


Observamos que la teoría de matrices y sistemas de ecuaciones lineales es de constante uso en la solución de problemas de geometría.

Ejercicio 4.12

Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados del paralelogramo.

Solución.



Sea el paralelogramo $ABCD$ y sean $\bar{a}$ y $\vec{b}$ los vectores asociados a los lados $\overline{AD}$

Sea el paralelogramo $ABCD$ y sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los vectores asociados a los lados ...
y $\overline{AB}$ respectivamente. Entonces $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son los vectores asociados con las diagonales donde $\overrightarrow{AC} = \bar{a} + \bar{b}$ y $\overrightarrow{BD} = \bar{a} - \bar{b}$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= (\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$$



$$= |\bar{a}|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 \qquad (4.24)$$
$$|\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$$
$$= (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b})$$
$$= |\bar{a}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{b}|^2 \qquad (4.25)$$

Sumando (4.24) y (4.25)

$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = 2|\bar{a}|^2 + 2|\bar{b}|^2 \qquad (4.26)$$

pero

$$|\bar{a}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|, \ |\bar{b}| = |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$$

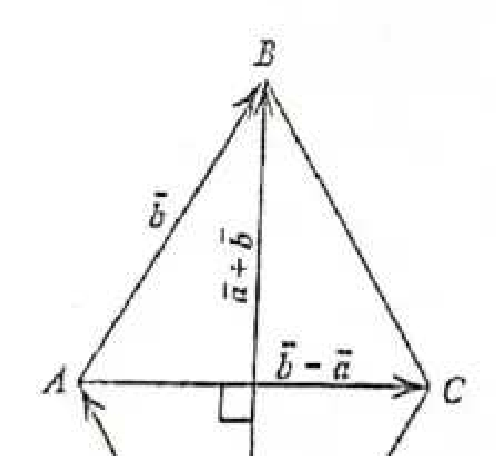
Entonces en (4.26)

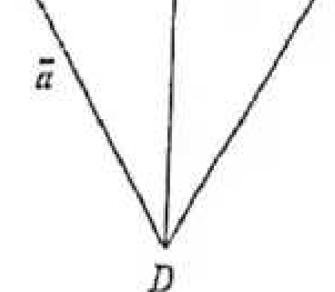
$$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$$

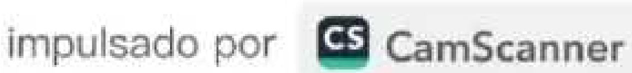
Ejercicio 4.15

Demostrar que si las diagonales de una paralelogramo con perpendiculares, entonces el paralelogramo es un rombo.

Solución.









En la figura, si las diagonales son perpendiculares entonces

$$(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{b}-\bar{a})=0$$

es decir

$$(\bar{b}+\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a})=0$$
$$|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2=0$$

entonces

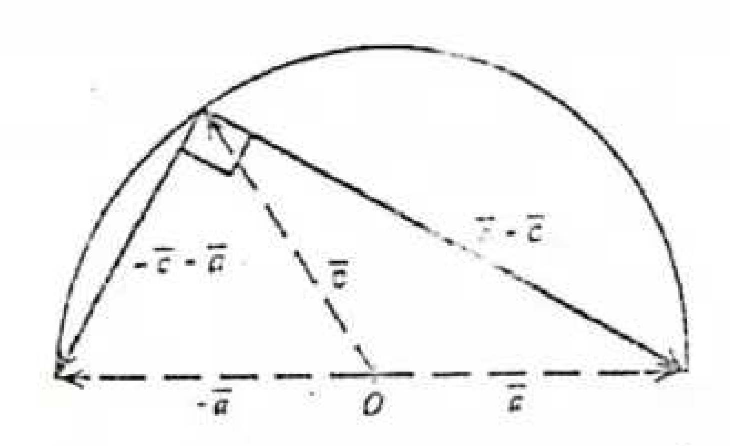
$$|\bar{b}|^2=|\bar{a}|^2 \Longrightarrow |\bar{a}|=|\bar{b}|,$$

luego, si dos lados adyacentes de un paralelogramo tienen la misma longitud, entonces el paralelogramo es un rombo.



Demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto

Solución.



En la figura, debemos demostrar que $(-\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{a}-\bar{c})=0$. Entonces

$$(-\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{a}-\bar{c})=-(\bar{a}+\bar{c})\cdot(\bar{a}-\bar{c})$$

$$= -(|\bar{a}|^2 - |\bar{c}|^2) = 0$$

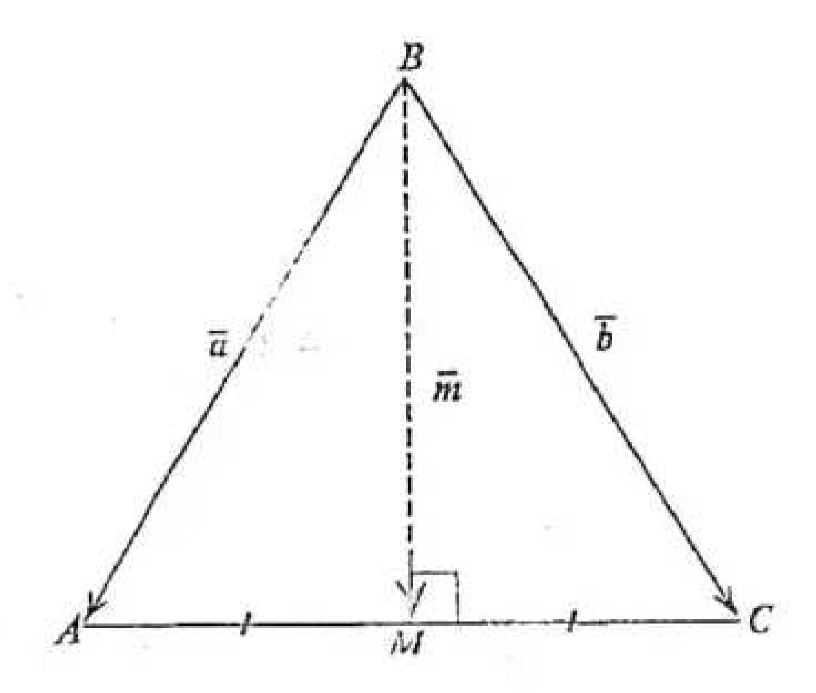
puesto que $|\bar{a}| = |\bar{c}|$



Ejercicio 4.15

Demostrar que la mediana a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a la base

Solución.



Sea el triángulo isósceles ABC con $AB = BC$ y M es punto medio de $\overline{AC}$, $\overline{BM}$ es la mediana trazada a la base. Asociamos los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{m}$ a los lados $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BM}$ respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) \\
\overrightarrow{AC} &= \bar{b} - \bar{a} \\
\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{b} - \bar{a}) = -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) \\
&= -\frac{1}{2}(|\bar{a}|^2 - |\bar{b}|^2) = 0
\end{aligned}$$

puesto que $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

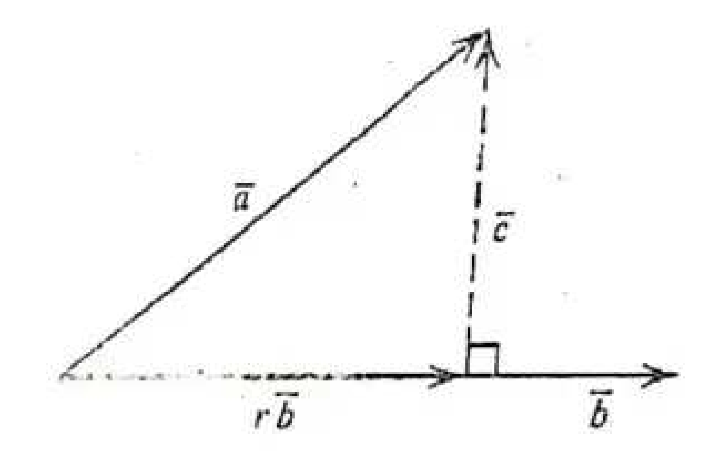
Por tanto, queda demostrado que $\overrightarrow{BM} \perp \overline{AC}$.

4.1.6 Proyección ortogonal. Componente

Estos dos conceptos son muy importantes tanto en geometría como en física.

Iniciamos tomando dos vectores no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_3. Si $\bar{a} \not\parallel \bar{b}$ podemos construir un triángulo rectángulo con hipotenusa $\bar{a}$ y base paralela a $\bar{b}$ como se muestra en la figura. Los catetos del triángulo son $r\bar{b}$ y $\bar{c} = \bar{a} - r\bar{b}$

$\bar{c} \perp \bar{b}$ entonces



$$\bar{c} \cdot \bar{b} = 0$$
$$(\bar{a} - r\bar{b}) \cdot b = 0$$
$$\bar{a} \cdot \bar{b} - r\bar{b} \cdot \bar{b} = 0$$

luego

$$r = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}$$

Definición 4.1.6

El vector $r\bar{b} = (\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2})\bar{b}$ se llama proyección ortogonal de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$ y se denota por $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$. Es decir,

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b}$$





Este resultado puede extenderse para vectores en V_n sin tener la significación geométrica que acabamos de usar para introducir este concepto.

Definición 4.17

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores en V_n, con $\bar{b} \neq \bar{0}$. La proyección ortogonal de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$, denotada por $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$, es el siguiente vector

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b}$$

Definición 4.18

El número $\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$ se llama componente de $\bar{a}$ en la dirección de $\bar{b}$ y se denota por $\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}$. Es decir,

$$\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}, \quad \bar{b} \neq \bar{0}$$

Observación.

1) La proyección es un vector y la componente es un número.

2)

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b} = \left(\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\right)\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \left(\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}\right)\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

3)

$$\left|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}\right| = \left|\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}\right|$$

es decir, la longitud de la proyección es el valor absoluto de la componente. En otras palabras: "la componente es la longitud orientada de la proyección".

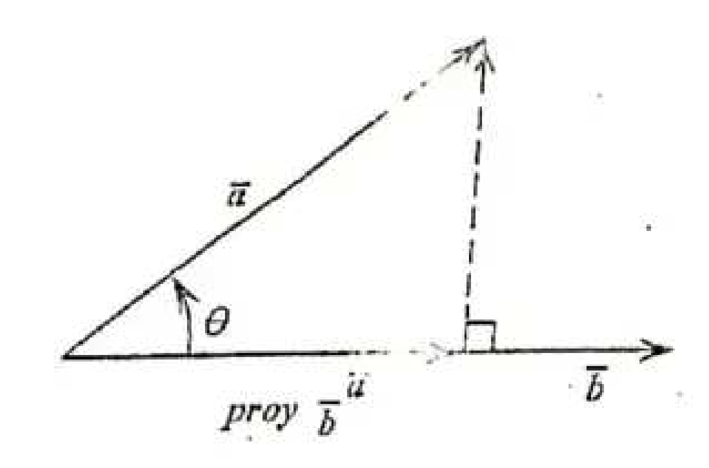
En efecto:

(a) Si $\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} > 0$ entonces $\bar{b}$ y $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$ están en la misma dirección y sentido.

Además, el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es agudo, es decir

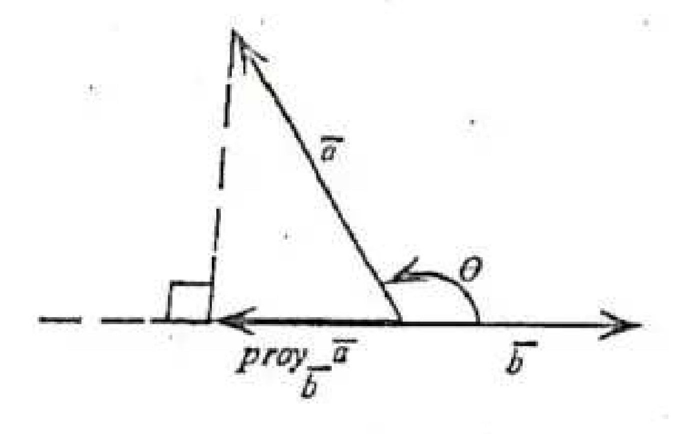
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$





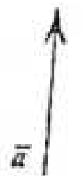
(b) Si $\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} < 0$ entonces $\bar{b}$ y $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$ están en la misma dirección, pero en sentidos opuestos y el ángulo que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ es obtuso, luego

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$



(c) Si $\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} = 0$ entonces

$$\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|} = 0 \Longrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \Longrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$$



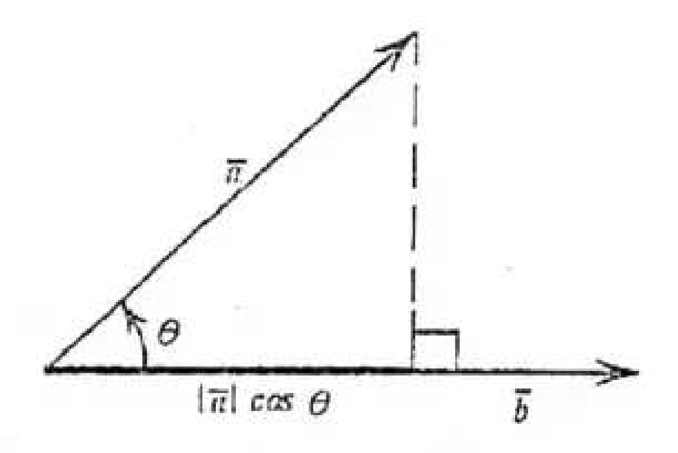


En este caso, la proyección de $\bar{a}$ sobre $\bar{b}$ es un punto y su longitud es cero, quiere decir que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

4) $\text{comp}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}$ entonces

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \left(\text{comp}_{\bar{b}}\, \bar{a}\right)|\bar{b}| \tag{4.27}$$



En la figura, si se conoce $|\bar{a}|$ y la medida del ángulo θ que forman $\bar{a}$ y $\bar{b}$ entonces también se conoce la longitud de los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\bar{a}$. Luego se tiene que

$$\text{comp}_{\bar{b}}\, \bar{a} = |\bar{a}|\cos\theta$$

reemplazando este resultado en (4.27)

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (|a|\cos\theta)|\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (|\bar{a}|\cos\theta)|\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$$

Por tanto

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\cdot\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \text{ para } \theta \in [0,\pi]$$

Esta es una fórmula para conocer la medida del ángulo entre dos vectores.



Nota

1) De la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|} \leq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} \leq 1$$

por tanto existe un y solo un ángulo $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$

2) Si $\cos\theta = \pm 1$ equivale a decir que $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.

3) Si θ es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y α es el ángulo entre $\lambda\bar{a}$ y $\bar{b}$ donde $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ y $\lambda \neq 0$, entonces

(a) Si $\lambda > 0$ entonces $\theta = \alpha$

(b) Si $\lambda < 0$ entonces θ y α son suplementarios. En efecto

$$\cos\alpha = \frac{\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\lambda\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\cdot\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\cos\theta$$

luego, para $\lambda > 0$ ambos son iguales y para $\lambda < 0$ son suplementarios (sus cosenos son opuestos)

Propiedades

1) $\operatorname{proy}_{\bar{b}}(\bar{a}+\bar{c}) = \operatorname{proy}_{\bar{b}}\bar{a} + \operatorname{proy}_{\bar{b}}\bar{c}$, $\forall \bar{a},\bar{b},\bar{c} \in V_n$

2) $\operatorname{proy}_{\bar{b}} r\bar{a} = r\operatorname{proy}_{\bar{b}}\bar{a}$, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a},\bar{b} \in V_n$

3) $\text{proy}_{r\bar{b}}\,\bar{a} = \text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_n$, $\forall r \in \mathbb{R}$

4) $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \text{proy}_{\bar{c}}\,\bar{a} \iff \bar{b} \parallel \bar{c}$

5) $\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \text{comp}_{\bar{c}}\,\bar{a} \iff \bar{b}$ y $\bar{c}$ tienen el mismo sentido.

6) $\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a} = -\text{comp}_{\bar{c}}\,\bar{a} \iff \bar{b}$ y $\bar{c}$ tienen sentidos opuestos.

La prueba de estas propiedades es aplicación directa de la definición.

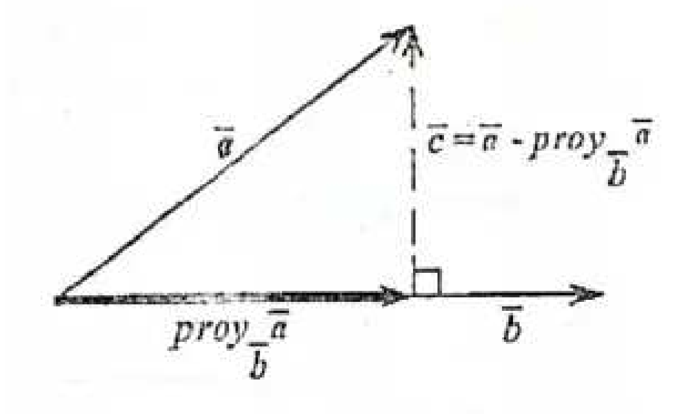
Teorema 4.3 Desigualdad de Cauchy...

Para cualesquiera vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_n,

$$|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$$

y se cumple la igualdad si y solo si $\bar{a} \parallel \bar{b}$

Demostración. Partimos de una interpretación geométrica para dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_3



1) Si $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ y $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ en la figura. Aplicando el teorema de Pitágoras

$$|\bar{a}|^2 = \left|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}\right|^2 + |\bar{c}|^2$$

$$\left|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}\right|^2 = |\bar{a}|^2 - |\bar{c}|^2 < |\bar{a}|^2$$

ya que $\bar{c} \neq \bar{0}$ y $|\bar{c}| > 0$.

Entonces se tiene que

$$|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}|^2 < |\bar{a}|^2$$

$$|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}| < |\bar{a}|$$

$$|\text{comp}_{\bar{b}}\,\bar{a}| < |\bar{a}| \Longrightarrow \left|\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}\right| < |\bar{a}|$$

Luego

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}| < |\bar{a}||\bar{b}|, \text{ si } \bar{a} \nparallel \bar{b}$$



2) Si $\bar{a} \parallel \bar{b}$ entonces $\exists r \in \mathbb{R}/\bar{a} = r\bar{b}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\bar{a}\cdot\bar{b}| &= |r\bar{b}\cdot\bar{b}| = |r(\bar{b}\cdot\bar{b})| \\ &= |r|\bar{b}|^2| = |r|\bar{b}||\bar{b}|| \\ &= |(r|\bar{b}|)|\bar{b}|| = ||r\bar{b}||\bar{b}|| \\ &= |\bar{a}||\bar{b}| \end{aligned}$$

◊



Nota

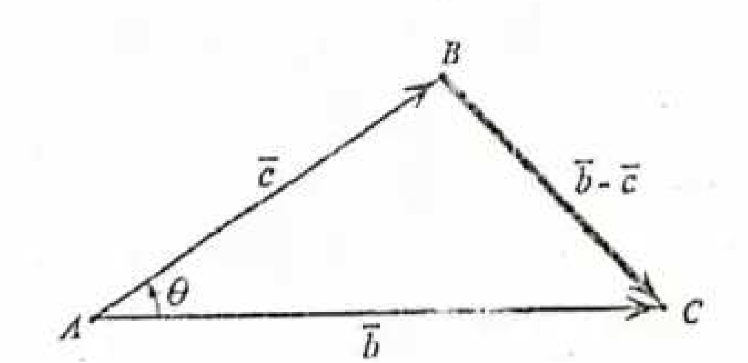
La desigualdad de Cauchy-Schwarz también se puede escribir de la siguiente manera $\forall \bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en V_n

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

y se cumple la igualdad si y solo si $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

[illegible]

En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.



En la figura, si $\overrightarrow{AC} = \bar{b}$ y $\overrightarrow{AB} = \bar{c}$ entonces $\overrightarrow{BC} = \bar{b} - \bar{c}$.

Sea $\theta = m\angle BAC$. Entonces



$$|\overrightarrow{BC}|^2 = (\bar{b} - \bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{c}) = |\bar{b}|^2 - 2\bar{b} \cdot \bar{c} + |\bar{c}|^2 \qquad (4.28)$$

pero $\bar{b} \cdot \bar{c} = |\bar{b}||\bar{c}| \cos\theta$. En (4.28)

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\bar{b}|^2 - 2|\bar{b}||\bar{c}| \cos\theta + |\bar{c}|^2$$

Por tanto

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}| \cos\theta$$

Ejemplo 4.10

Expresar, en cada caso, $\bar{a}$ como la suma de un vector en la dirección de $\bar{b}$ y otro vector ortogonal a $\bar{b}$ si

1) $\bar{a} = (1, 3, -5)$ y $\bar{b} = (0, 0, , 1)$

2) $\bar{a} = (1, -2, 3)$ y $\bar{b} = (1, 1, 0)$

3) $\bar{a} = (2, 1, 1)$ y $\bar{b} = (1, -3, 2)$

Solución.

1)

$$\text{proy}_{\bar{b}}\, \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b} = \frac{-5}{1}(0, 0, 1) = (0, 0, -5)$$

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \bar{a} - \text{proy}_{\bar{b}}\, \bar{a} \\ &= (1, 3, -5) - (0, 0, -5) = (1, 3, 0) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} (\text{proy}_{\bar{b}}\, \bar{a}) + \bar{c} &= (0, 0, -5) + (1, 3, 0) \\ &= (1, 3, -5) = \bar{a} \end{aligned}$$

2)

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2} = \frac{-1}{2}(1,1,0)$$

$$\bar{c} = \bar{a} - \text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$$



$$= (1,-2,3) - (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$$
$$= (\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3)$$

entonces

$$(\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}) + \bar{c} = (-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0) + (\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3)$$
$$= (1,-2,3) = \bar{a}$$

3)

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2} = \frac{1}{14}(1,-3,2)$$

$$\bar{c} = \bar{a} - \text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}$$
$$= (2,1,1) - \frac{1}{14}(1,-3,2)$$
$$= (\frac{27}{14},\frac{17}{14},\frac{12}{14})$$

entonces

$$(\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}) + \bar{c} = \frac{1}{14}(1,-3,2) + \frac{1}{14}(27,17,12)$$
$$= (2,1,1) = \bar{a}$$

Ejemplo [illegible]

Si $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = (3,2,5)$ y $\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} = (-1,-3,4)$. Calcular $\bar{a}$ y $\bar{b}$

Solución.

Si $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = (3,2,5)$ entonces $\bar{b} = r(3,2,5)$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

Si $\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} = (-1,-3,4)$ entonces $\bar{a} = k(-1,-3,4)$ para algún $k \in \mathbb{R}$

Si $\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} = (-1,-3,4)$ entonces $\bar{a} = k(-1,-3,4)$ para algún $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b}$$

$$= \frac{rk(-3-6+20)}{r^2(9+4+25)}r(3,2,5)$$
$$= k\frac{11}{38}(3,2,5)$$

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} &= \frac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|^2}\bar{a}\\ &= \frac{rk(-3-6+20)}{k^2(1+9+16)}k(-1,-3,4)\\ &= r\frac{11}{26}(-1,-3,4)\end{aligned}$$

pero

$$\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = (3,2,5) \Longrightarrow k = \frac{38}{11}$$

y

$$\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} = (-1,-3,4) \Longrightarrow r = \frac{26}{11}$$

Luego $\bar{a} = \frac{38}{11}(-1,-3,4)$ y $\bar{b} = \frac{26}{11}(3,2,5)$

Ejemplo 4.12

El vector $\bar{x}$ es ortogonal a los vectores $\bar{a} = (-3,2,1)$ y $\bar{b} = (7,-5,6)$ y forma con el eje Y^+ un ángulo obtuso. Hallar $\bar{x}$ si $|\bar{x}| = \sqrt{915}$

Solución.

Sea $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in V_3$ tal que $\bar{x}\cdot\bar{a} = 0$ y $\bar{x}\cdot\bar{b} = 0$, entonces

$$\bar{x}\cdot\bar{a} = -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}\cdot\bar{a} = -3x_1+2x_2+x_3=0\\ \bar{x}\cdot\bar{b} = 7x_1-5x_2+6x_3=0\end{array}\right\} AX=0$$

es un sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas, cuya matriz de coeficientes es



$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 7 & -5 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 8\\ 0 & 1 & -25\end{pmatrix}=E_A$$

$r(A)=2<n$ entonces existe $n-2=1$ incógnita arbitraria.

$$\bar{x}=t(17,25,1)$$

Además $\bar{x}\cdot(0,1,0)<0$ entonces

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(0,1,0)<0\Longrightarrow x_2<0$$

Entonces en $\bar{x}$, la constante $t<0$. Luego

$$\begin{aligned}|\bar{x}| &= |t|\sqrt{17^2+25^2+1}\\ &= |t|\sqrt{915}\\ &= \sqrt{915}\end{aligned}$$

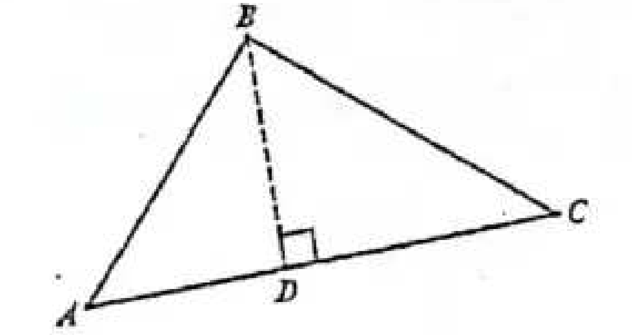
$|t|=1$ y $t=-1$. Por tanto, $\bar{x}=(-17,-25,-1)$

4.1.7 Ejercicios resueltos

Ejercicio 4.16

Los vértices de un $\triangle ABC$ con $A=(-1,2,-3)$, $B=(0,4,0)$, $C=(0,5,-4)$. Hallar los números r y t tal que la altura $\overline{BD}$ de dicho triángulo cumple la siguiente relación $\overrightarrow{BD}=r\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AB}$

Solución.





$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \text{proy}_{\overrightarrow{AC}}\, \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{(1,2,3)\cdot(1,3,-1)}{11}(1,3,-1) \\
&= \frac{4}{11}(1,3,-1) \\
&= \frac{4}{11}\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \\
\overrightarrow{BD} &= \frac{4}{11}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}
\end{aligned}
$$

entonces $r = \frac{4}{11}$ y $t = -1$

Ejercicio 4.17

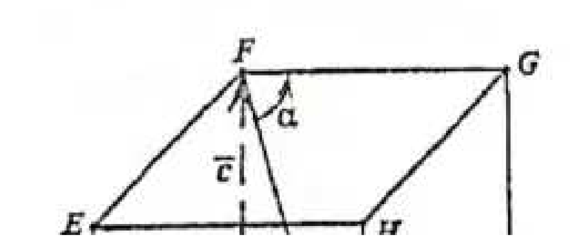
Dado un cubo. Hallar

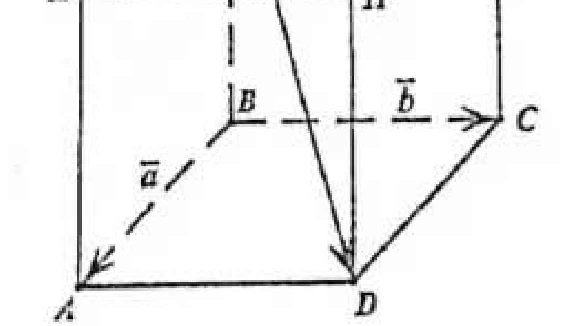
1) El ángulo formado por una diagonal del cubo y una de sus aristas.

2) El ángulo formado por una diagonal del cubo y una de las diagonales de sus caras.

3) El ángulo formado por las diagonales del cubo.

Solución.









Asociamos a las aristas del cubo los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ respectivamente, donde $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$

1)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FD} &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} = -\bar{c} + (\bar{b} + \bar{a}) \\
|\overrightarrow{FD}|^2 &= \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FD} \\
&= (-\bar{c} + \bar{b} + \bar{a}) \cdot (-\bar{c} + \bar{b} + \bar{a}) \\
&= |\bar{c}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{a}|^2 - 2\bar{c}.\bar{b} - 2\bar{c} \cdot \bar{a} + 2\bar{a}.\bar{b} \\
&= 3|\bar{b}|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FG}||\overrightarrow{FD}|} \\
&= \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \cdot \frac{(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c})}{\sqrt{3}|\bar{b}|} \\
&= \frac{|\bar{b}|^2}{\sqrt{3}|\bar{b}|^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

2) $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FH}}{|\overrightarrow{FD}||\overrightarrow{FH}|}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FH} &= \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \bar{b} + \bar{a} \\
|\overrightarrow{FG}|^2 &= \overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{FH} \\
&= (\bar{b} + \bar{a}) \cdot (\bar{b} + \bar{a}) \\
&= |\bar{b}|^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + |\bar{a}|^2 \\
&= 2|\bar{b}|^2
\end{aligned}$$

$$\cos\beta = \frac{(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})\cdot(\bar{a}+\bar{b})}{\sqrt{3}|\bar{b}|\sqrt{2}|\bar{b}|}$$

$$= \frac{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2}{\sqrt{6}|\bar{b}|^2} = \frac{2|\bar{b}|^2}{\sqrt{6}|\bar{b}|^2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

3) $\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EC}}{|\overrightarrow{FD}||\overrightarrow{EC}|}$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EH} + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GC}) = \bar{b} + (-\bar{a} - \bar{c})$$

$$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{EC} = (\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})\cdot(-\bar{a}+\bar{b}-\bar{c})$$

$$= -|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + |\bar{c}|^2 = |\bar{b}|^2$$

$$|\overrightarrow{EC}|^2 = (\bar{b}-\bar{a}-\bar{c})\cdot(\bar{b}-\bar{a}-\bar{c}) = 3|\bar{b}|^2$$

$$\cos\gamma = \frac{|\bar{b}|^2}{\sqrt{3}|\bar{b}|\sqrt{3}|\bar{b}|} = \frac{1}{3}$$

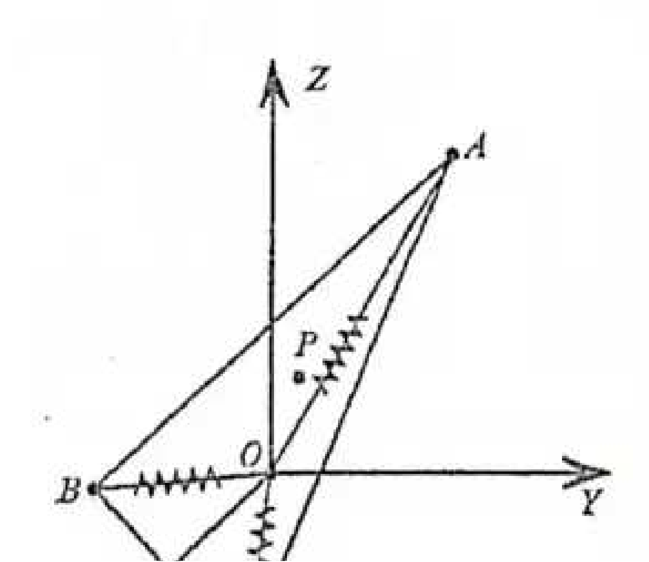
Ejercicio 4.18

Sea $OABC$ un tetraedro, donde O es el origen de coordenadas que equidista de los puntos $A, B = (12,4,8)$ y C, $P = (8,8,8)$ es un punto sobre la cara ABC del tetraedro

$$\text{proy}_{\overrightarrow{OP}}\overrightarrow{OA} = \text{proy}_{\overrightarrow{OP}}\overrightarrow{OB} = \text{proy}_{\overrightarrow{OP}}\overrightarrow{OC}$$

y el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{PC}$ mide 60°, $|\overrightarrow{AB}| = 4\sqrt{6}$. Determinar los vértices del tetraedro.

Solución.



$$OA = OB = OC = |4(3,1,2)| = 4\sqrt{14}$$
$$\overrightarrow{PB} = B - P = (4,-4,0), \qquad |\overrightarrow{PB}| = 4\sqrt{2}$$
$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = |\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|\cos 60^\circ \tag{4.29}$$

$$\text{proy}_{\overrightarrow{OP}}\, \overrightarrow{OA} = \text{proy}_{\overrightarrow{OP}}\, \overrightarrow{OB} = \text{proy}_{\overrightarrow{OP}}\, \overrightarrow{OC}$$

entonces

$$|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PC}|, \qquad C = (c_1, c_2, c_3)$$

En (4.29)

$$(4,-4,0)\cdot(c_1-8, c_2-8, c_3-8) = (4\sqrt{2})^2\frac{1}{2} = 16$$
$$(1,-1,0)\cdot(c_1-8, c_2-8, c_3-8) = 4$$
$$(c_1-8)-(c_2-8) = 4 \Longrightarrow c_1 - c_2 = 4 \tag{4.30}$$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PC}$ entonces

$$(8,8,8)\cdot(c_1-8, c_2-8, c_3-8) = 0$$
$$8c_1 + 8c_2 + 8c_3 - 3(64) = 0 \Longrightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 24 \tag{4.31}$$

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = 4\sqrt{14} \tag{4.32}$$

De (4.30),(4.31) y (4.32)

$$c_2^2 - 12c_2 + 32 = 0$$
$$(c_2 - 8)(c_2 - 4) = 0$$

entonces

$$\begin{cases} c_2 = 8, \ c_1 = 12, \ c_3 = 4 \\ c_4 = 4, \ c_1 = 8, \ c_3 = 12 \end{cases}$$

$C = (12, 8, 4)$ ó $C = (8, 4, 12)$. Elegimos $C = (12, 8, 4)$.

Por otro lado,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(a_1 - 12)^2 + (a_2 - 4)^2 + (a_3 - 8)^2} = 4\sqrt{6} \tag{4.33}$$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PA}$, entonces

$$(8, 8, 8) \cdot (a_1 - 8, a_2 - 8, a_3 - 8) = 0 \Longrightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 24 \tag{4.34}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = 4\sqrt{14} \tag{4.35}$$

De (4.33), (4.34) y (4.35)

$$A = \left(-\frac{t}{2} + 10, -\frac{t}{2} + 14, t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

elegimos t de modo que las soluciones sean enteras y positivas

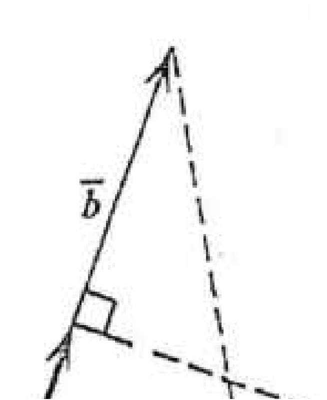
$$A = (4, 8, 12) \text{ ó } A = (8, 12, 4)$$

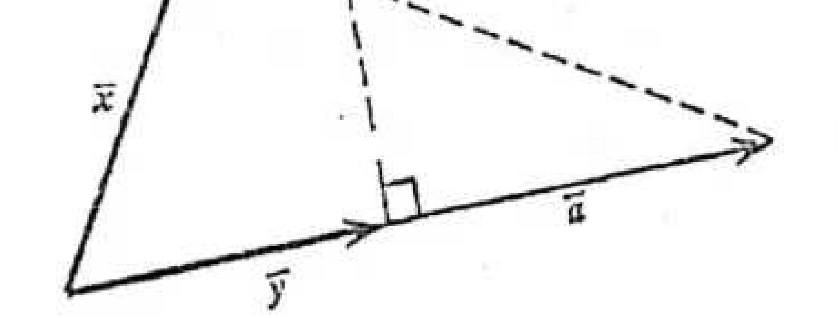
Elegimos $A = (4, 8, 12)$

Ejercicio 4.42

Si $\text{proy}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \bar{x}$ y $\text{proy}_{\vec{a}}\, \vec{b} = \bar{y}$. Hallar $\bar{a}$ y $\vec{b}$.

Solución.









$\bar{b} = r\bar{x},\ \bar{a} = t\bar{y},\ r > 0,\ t > 0$

$$\bar{x} = \text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b} = \frac{(t\bar{y})\cdot(r\bar{x})}{|r\bar{x}|^2}(r\bar{x}) = t\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|^2}\bar{x}$$

entonces

$$\bar{x}\left(1 - t\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|^2}\right) = \bar{0}$$

$$1 - t\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{x}|^2} = 0$$

$$t = \frac{|\bar{x}|^2}{\bar{x}\cdot\bar{y}}$$

$$\bar{a} = t\bar{y} = \frac{|\bar{x}|^2}{\bar{x}\cdot\bar{y}}\bar{y}$$

$$\bar{y} = \text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} = \frac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|^2}\bar{a} = \frac{(r\bar{x})\cdot(t\bar{y})}{|t\bar{y}|^2}(t\bar{y}) = r\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|^2}\bar{y}$$

entonces

$$\left(1 - r\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|^2}\right)\bar{y} = \bar{0}$$

$$1 - r\frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|^2} = 0$$

$$r = \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{x}\cdot\bar{y}}$$

$$\bar{b} = \frac{|\bar{y}|^2}{\bar{x}\cdot\bar{y}}\bar{x}$$


Ejercicio 4.20

1) Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ vectores no paralelos en V_3, $\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = (2,3,4)$, $\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b} = (4,3,2)$ un vector $\bar{x}$ es ortogonal a $\bar{a}$ y a $\bar{b}$ y forma con el eje Y un ángulo agudo cuyo módulo es $7\sqrt{6}$. Hallar $\bar{x}$.



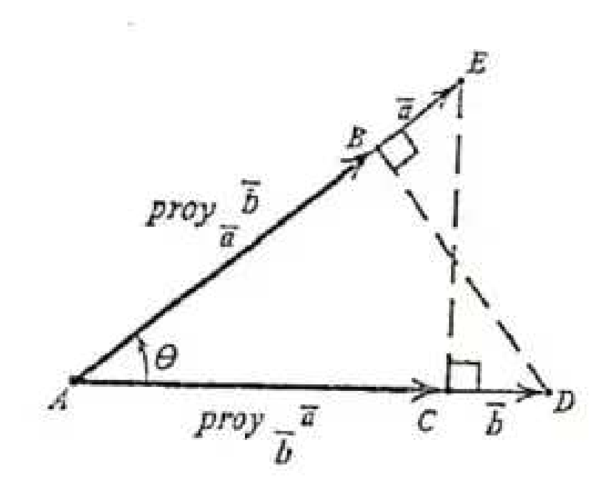


2) Sean $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ vectores en V_n, $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) \parallel \bar{b}$, $|\bar{b}+\bar{c}| = |\bar{a}+\bar{b}|$. Si

$$\text{proy}_{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{a} = k\left(\text{proy}_{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}}\,\bar{c}\right)$$

Calcular el valor de k.

Solución.



1)

$$\left|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}\right| = \left|\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b}\right| = \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}$$

$$\theta = \angle(\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}, \text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b}) = \angle(\bar{b}, \bar{a})$$

$$\cos\theta = \frac{\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}\cdot\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b}}{|\text{proy}_{\bar{b}}\,\bar{a}||\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b}|} = \frac{8+9+8}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = \frac{25}{29} \qquad (4.36)$$

$\triangle ABD$

$$\cos\theta = \frac{|\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{b}|}{|\bar{b}|} \qquad (4.37)$$

(4.36) en (4.37)

$\sqrt{29}$ 25 $29\sqrt{29}$

$$\cos\theta = \frac{\quad}{|\bar{b}|} = \frac{\quad}{29} \Longrightarrow = \frac{\quad}{25}$$

ΔAEC

$$\cos\theta = \frac{|\operatorname{proy}_{\bar{b}}\bar{a}|}{|\bar{a}|} \tag{4.38}$$



(4.36) en (4.38)

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{29}}{|\bar{a}|} = \frac{25}{29} \longrightarrow |\bar{a}| = \frac{29\sqrt{29}}{25}$$

$$\bar{a} \parallel (4,3,2) \Longrightarrow \bar{a} = \frac{29\sqrt{29}}{25}\frac{(4,3,2)}{\sqrt{29}} = \frac{29}{25}(4,3,2)$$

$$\bar{b} \parallel (2,3,4) \Longrightarrow \bar{b} = \frac{29\sqrt{29}}{25}\frac{(2,3,4)}{\sqrt{29}} = \frac{29}{25}(2,3,4)$$

$\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}\cdot\bar{a} = 0 \Longrightarrow \frac{29}{25}(4x_1 + 3x_2 + 2x_3) = 0 \Longrightarrow 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ \bar{x}\cdot\bar{b} = 0 \Longrightarrow \frac{29}{25}(2x_1 + 3x_2 + 4x_3) = 0 \Longrightarrow 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array}\right\} AX = 0$$

$\bar{x}\cdot(0,1,0) > 0 \Longrightarrow x_2 > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$\bar{x} = (t, -2t, t)\ t \in \mathbb{R}$

$$|\bar{x}| = \sqrt{t^2 + 4t^2 + t^2} = |t|\sqrt{6} = 7\sqrt{6} \Longrightarrow t = \pm 7$$

$t = -7 < 0$ entonces $\bar{x} = (-7, 14, -7)$

2) Sea $\bar{m} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$

$$\operatorname{proy}_{\bar{m}}\bar{a} = k\operatorname{proy}_{\bar{m}}\bar{c}$$

$$\frac{\bar{m}\cdot\bar{a}}{\quad}\bar{m} = k\frac{\bar{m}\cdot\bar{c}}{\quad}\bar{m}$$

$$\frac{\ }{|\bar{m}|^2}\bar{m} = k\frac{\ }{|\bar{m}|^2}\bar{m}$$

$$k = \frac{\bar{m}\cdot\bar{a}}{\bar{m}\cdot\bar{c}}$$

$\bar{m} \parallel \bar{b}$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{m} = t\bar{b}$, luego

$$k = \frac{t\bar{b}\cdot\bar{a}}{t\bar{b}\cdot\bar{c}} = \frac{\bar{b}\cdot\bar{a}}{\bar{b}\cdot\bar{c}} \tag{4.39}$$

$|\bar{b}+\bar{c}| = |\bar{a}+\bar{b}|$ entonces

$$|\bar{b}+\bar{c}|^2 = |\bar{a}+\bar{b}|^2 \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned} \bar{m} &= t\bar{b} \\ (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) &= t\bar{b} \\ \bar{b}+\bar{c} &= t\bar{b}-\bar{a} \\ |\bar{b}+\bar{c}|^2 &= |t\bar{b}-\bar{a}|^2 \end{aligned} \tag{4.41}$$

En (4.40)

$$\begin{aligned} |\bar{a}+\bar{b}|^2 &= |t\bar{b}-\bar{a}|^2 \\ (\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) &= (t\bar{b}-\bar{a})\cdot(t\bar{b}-\bar{a}) \\ |\bar{a}|^2 + 2\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2 &= t^2|\bar{b}|^2 - 2t\bar{b}\cdot\bar{a} + |\bar{a}|^2 \\ 2(1+t)\bar{a}\cdot\bar{b} &= (t^2-1)|\bar{b}|^2 \\ 2\bar{a}\cdot\bar{b} &= (t-1)|\bar{b}|^2 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Operando de manera similar

$$2\bar{b}\cdot\bar{c} = (t-1)|\bar{b}|^2 \tag{4.43}$$

Reemplazando (4.42) y (4.43) en (4.39)

$$k = 1$$

4.1.8 Producto vectorial

Hasta aquí el único producto entre dos vectores que se ha definido es el producto escalar. Solamente en el espacio V_3 existe un segundo tipo de producto entre dos vectores que da como resultado otro vector, llamado producto cruz o producto vectorial, que tiene aplicaciones muy importantes tanto en geometría como en física.

Definición 4.19

Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son vectores en V_3 se llama **producto vectorial** de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se denota por $\bar{a} \times \bar{b}$ que se lee "$\bar{a}$ cruz $\bar{b}$" al siguiente vector de V_3

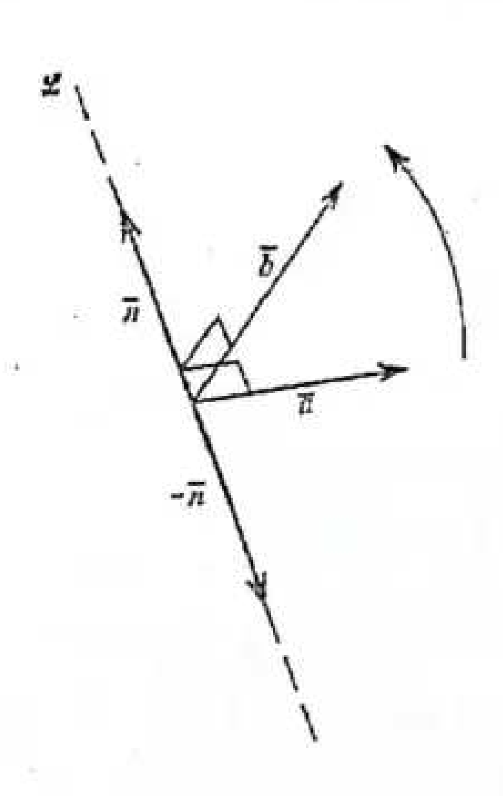
$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Como $\bar{a} \times \bar{b}$ es un vector, entonces

$$\bar{a} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$
$$\bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

luego $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{a}$ y $(\bar{a} \times \bar{b}) \perp \bar{b}$

Dados los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_3, existe una recta $L \parallel \bar{n}$ tal que $\bar{n} \cdot \bar{a} = 0$ y $\bar{n} \cdot \bar{b} = 0$

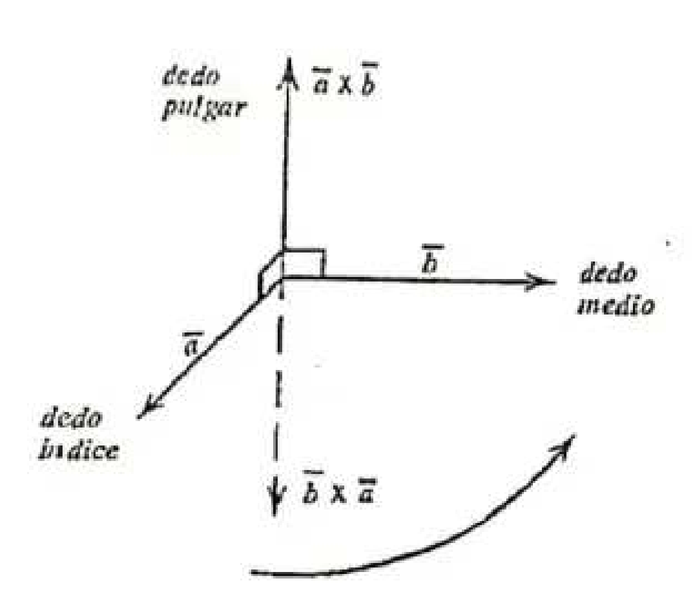


¿Cuál de ellos da la dirección y sentido de $\bar{a} \times \bar{b}$?

¿Cuál de ellos da la dirección y sentido de $\bar{a} \times \bar{b}$?

La respuesta se encuentra en la *regla de la mano derecha*. Si se coloca la mano derecha de modo que el dedo índice apunta en el sentido de $\bar{a}$ y el dedo medio apunta en el sentido de $\bar{b}$ entonces el pulgar apuntará en la dirección y sentido de $\bar{a} \times \bar{b}$





En consecuencia, $\bar{a} \times \bar{b}$ es el resultado del producto cruz de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, tomados en ese orden y en sentido antihorario.

$\bar{b} \times \bar{a}$ tiene sentido opuesto a $\bar{a} \times \bar{b}$. Es decir $\bar{b} \times \bar{a} = -(\bar{a} \times \bar{b})$

Propiedades

Si $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c} \in V_3$ y $r \in \mathbb{R}$

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$

2) $(r\bar{a}) \times \bar{b} = r(\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{a} \times (r\bar{b})$

3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$

4) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{c}) + (\bar{b} \times \bar{c})$

5) $\bar{a} \times \bar{0} = \bar{0} \times \bar{a} = \bar{0}$

6) $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$

7) $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$

La prueba de estas propiedades es aplicación directa de la definición

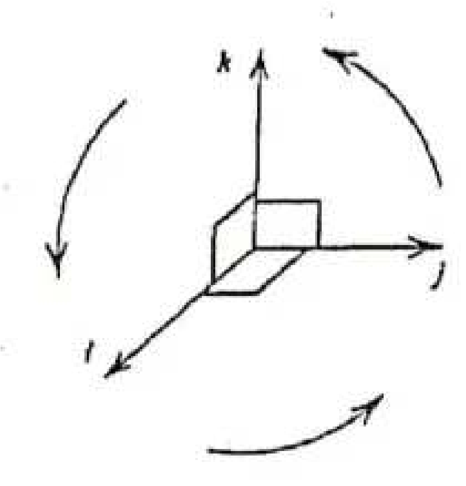


Nota

1) La propiedad 1 indica que el producto vectorial no es conmutativo.

2) La propiedad 7 indica que el producto vectorial no es asociativo (Demostración en el Ejemplo 4.20)

Observación.



1)

$$i \times i = j \times j = k \times k = \bar{0}$$
$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

2)

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i(a_2b_3 - a_3b_2) - j(a_1b_3 - a_3b_1) + k(a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$
$$= \bar{a} \times \bar{b}$$

Nota

Cabe anotar que este no es un determinante propiamente dicho ya que las componentes de la 1ª fila son vectores y no números reales. Sin embargo, es una notación conveniente para obtener $\bar{a} \times \bar{b}$.



3)

$$
\begin{aligned}
|\bar{a} \times \bar{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= (a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2) + (a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2) + \\
&\quad (a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2) \\
&= a_1^2(b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2) \\
&\quad - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= a_1^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \\
&\quad - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&\quad + 2a_1a_2b_1b_2 + 2a_1a_3b_1b_3 + 2a_2a_3b_2b_3) \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2
\end{aligned}
$$

Nota

En el Ejemplo 4.21, se presenta una demostración más simple de esta identidad.

4) Se sabe que $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|\bar{a} \times \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 \\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (|\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta)^2 \\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2(1 - \cos^2\theta)
\end{aligned}
$$

$$= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

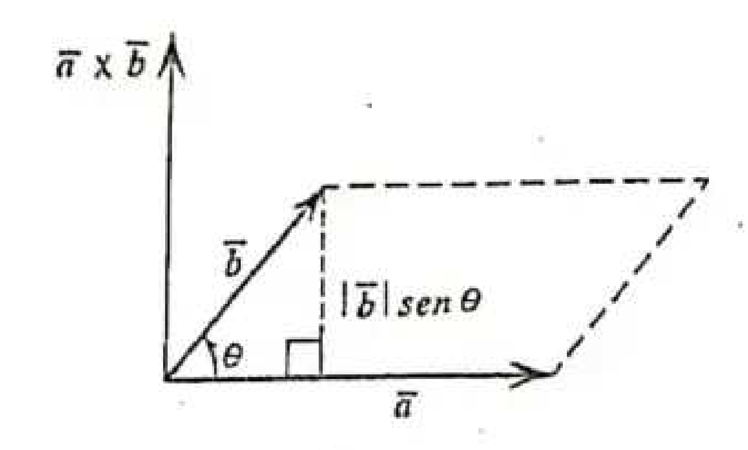
$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \operatorname{sen}\theta$$

donde $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ puesto que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Veamos la interpretación geométrica de este resultado







En la figura, $|\bar{b}| \operatorname{sen}\theta$ es la altura del paralelogramo de lados $\bar{a}$ y $\bar{b}$, entonces $|\bar{a} \times \bar{b}|$ resulta ser el área del paralelogramo de lados $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Es decir

$$\text{área}_{\square} = |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Luego

$$\text{área}_{\triangle} = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|$$

(área del triángulo de lados $\bar{a}$ y $\bar{b}$)

Teorema 3.5

Dos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_3 son paralelos si y solo si $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$

Demostración.

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} &\Longleftrightarrow |\bar{a} \times \bar{b}| = 0 \\ &\Longleftrightarrow |\bar{a} \times \bar{b}|^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 = (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 \\ &\Longleftrightarrow |\bar{a}||\bar{b}| = |\bar{a} \cdot \bar{b}| \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$$

es la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz, por tanto, se verifica que $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ◇

Ejemplo 4.13

Demostrar que

$$(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) = (2\bar{a}) \times \bar{b}$$

Solución.
En efecto

$$\begin{aligned}
(\bar{a} - \bar{b}) \times (\bar{a} + \bar{b}) &= (\bar{a} - \bar{b}) \times \bar{a} + (\bar{a} - \bar{b}) \times \bar{b} \\
&= (\bar{a} \times \bar{a}) - (\bar{b} \times \bar{a}) + (\bar{a} \times \bar{b}) - (\bar{b} \times \bar{b}) \\
&= \bar{0} - (\bar{b} \times \bar{a}) + (\bar{a} \times \bar{b}) - \bar{0} \\
&= (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{b}) \\
&= 2(\bar{a} \times \bar{b}) \\
&= (2\bar{a}) \times \bar{b}
\end{aligned}$$



Demostrar que

$$(\bar{a} + r\bar{b}) \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{b},\ \forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3 \text{ y } r \in \mathbb{R}$$

Solución.
En efecto

$$\begin{aligned}
(\bar{a} + r\bar{b}) \times \bar{b} &= \bar{a} \times \bar{b} + (r\bar{b}) \times \bar{b} \\
&= \bar{a} \times \bar{b} + r(\bar{b} \times \bar{b}) \\
&= \bar{a} \times \bar{b}
\end{aligned}$$



Demostrar que

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{a} \cdot (\bar{d} \times \bar{c}) = \bar{a} \cdot ((\bar{b} + \bar{d}) \times \bar{c})$$

Solución.
En efecto

$$\begin{aligned}\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) + \bar{a} \cdot (\bar{d} \times \bar{c}) &= \bar{a} \cdot ((\bar{b} \times \bar{c}) + (\bar{d} \times \bar{c})) \\ &= \bar{a} \cdot ((\bar{b} + \bar{d}) \times \bar{c})\end{aligned}$$



Si $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{0}$ entonces

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$$

Solución.
En efecto

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) - (\bar{b} \times \bar{c}) &= (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{c} \times \bar{b}) \\ &= (\bar{a} + \bar{c}) \times \bar{b} \\ &= \bar{0} \times \bar{b} = \bar{0}\end{aligned}$$

puesto que $\bar{a} = \bar{c} = \bar{0}$. Por tanto

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} \tag{4.44}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) - (\bar{c} \times \bar{a}) &= (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c}) \\ &= \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) \\ &= \bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}\end{aligned}$$

puesto que $\bar{b} = \bar{c} = \bar{0}$. Luego

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{a} \tag{4.45}$$

4.1.9 Triple producto escalar

Definición 4.20

Dados tres vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c} \in V_3$, el triple producto escalar de $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ denotado por $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$ es el siguiente número real

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$$

Observación.

1) Si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\begin{aligned}
[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] &= \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \\
&= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

este resultado es muy útil para calcular el triple producto escalar de tres vectores en V_3.

2) Por cálculo directo, se puede verificar que

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$$

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{a}] = [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}]$$

3) Comparando los extremos de esta igualdad se tiene

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$$

es decir, se puede intercambiar el punto por la cruz y la cruz por el punto, pero conservando las operaciones puesto que no tendría sentido escribir que

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a} \times (\bar{b} \cdot \bar{c})$$

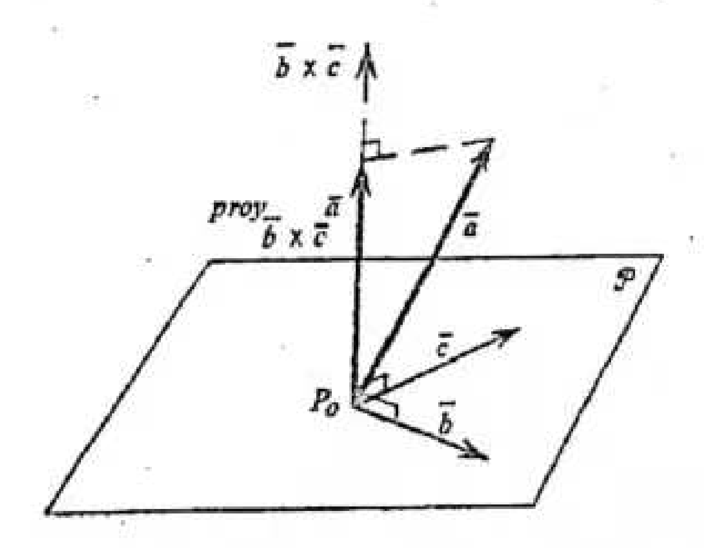
4) El triple producto escalar es un número que puede ser positivo, negativo o cero.

5) El triple producto escalar puede usarse para describir la orientación de $\mathbb{R}^3$ (para mejor comprensión, revisar antes el concepto de plano en la Sección 4.2)

Definición 4.2

Tres vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ en V_3 están positivamente orientados si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] > 0$

Interpretación geométrica.



Construimos $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ con el mismo punto inicial P_0 y llamamos $\mathscr{P}$ al plano que pasa por P_0 determinado por los vectores no paralelos $\bar{b}$ y $\bar{c}$.

Graficamos $\bar{b} \times \bar{c}$ que es ortogonal al plano $\mathscr{P}$.

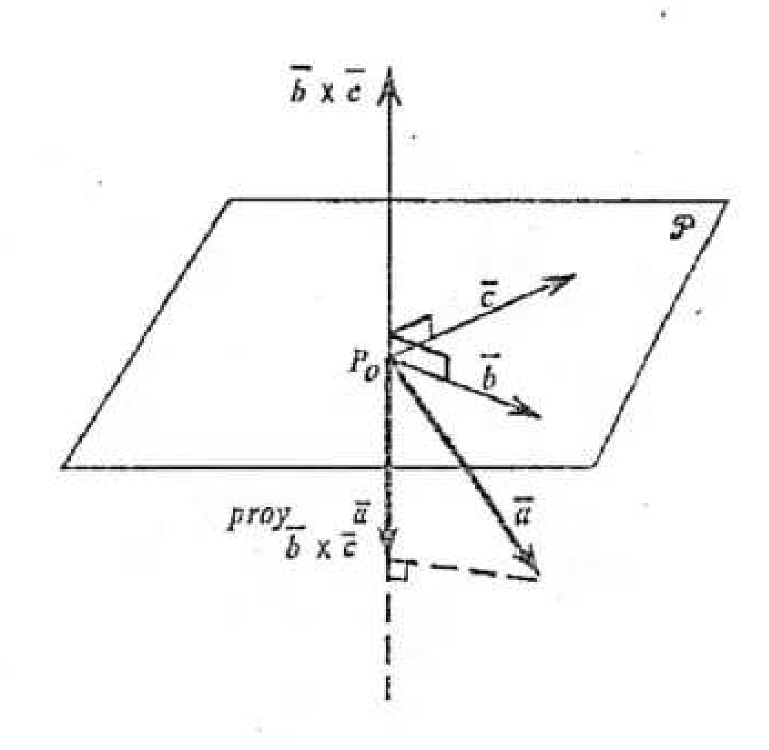
Si $\bar{b} \nparallel \bar{c}$ entonces $\bar{b} \times \bar{c} \neq \bar{0}$

$$
\begin{aligned}
[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] &= \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) \\
&= \frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{|\bar{b}\times\bar{c}|}|\bar{b}\times\bar{c}| \\
&= \left(\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a}\right)|\bar{b}\times\bar{c}|
\end{aligned}
$$



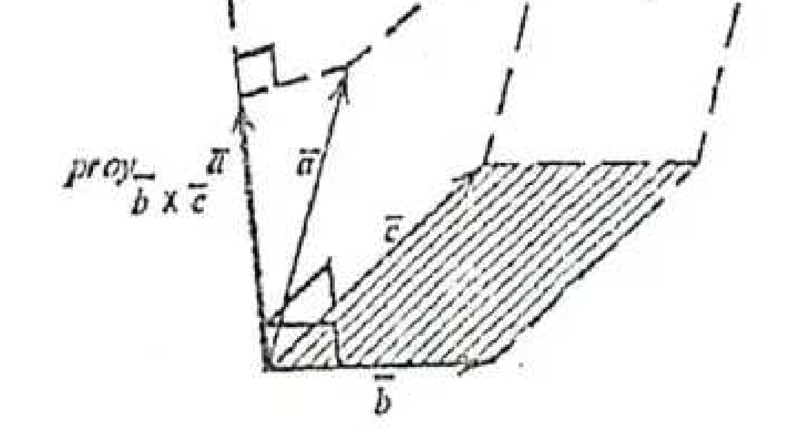
Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] > 0$ entonces $\left(\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a}\right) > 0$ y geométricamente significa que $\bar{b}\times\bar{c}$ y $\text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a}$ están en la misma dirección y sentido. Es decir que $\bar{a}$ y $\bar{b}\times\bar{c}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$.

Contrariamente, si los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ están en la posición que muestra la figura, $\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a} < 0$ puesto que $\bar{b}\times\bar{c}$ y $\text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a}$ están en la misma dirección y sentidos opuestos, es decir que $\bar{a}$ y $\bar{b}\times\bar{c}$ están en lados opuestos del plano $\mathscr{P}$ y entonces $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] < 0$ significa que los vectores están **negativamente orientados.**



6) Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ ha de interpretarse geométricamente que los vectores son coplanares, es decir están contenidos en el mismo plano.

$\bar{b}\times\bar{c}$



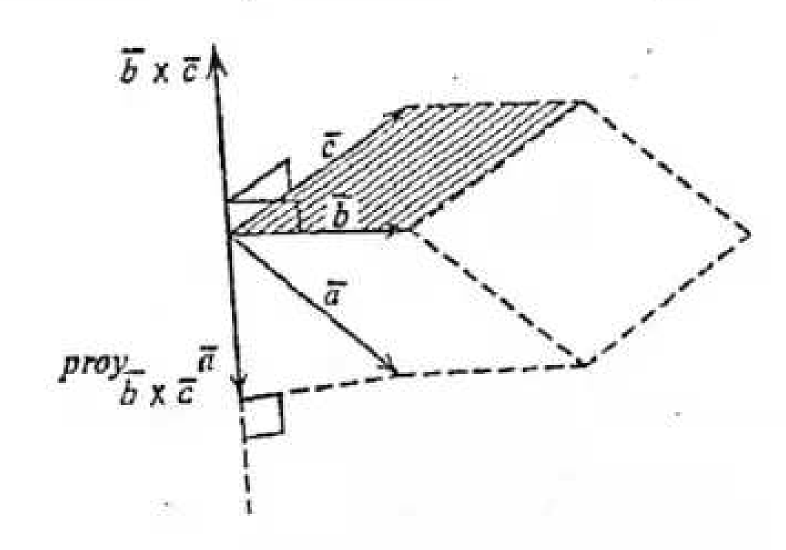




7) Volumen de un paralelepípedo, cuyas aristas son los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$. Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] > 0$ están positivamente orientados, entonces

$$\begin{aligned} V &= (\text{área base})(\text{altura}) \\ &= |\bar{b} \times \bar{c}| \left|\text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{a}\right| \\ &= |\bar{b} \times \bar{c}| \left|\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{a}\right| \\ &= |\bar{b} \times \bar{c}| \left|\frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{|\bar{b}\times\bar{c}|}\right| = |\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})| \\ &= [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \end{aligned}$$

Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] < 0$ entonces $V = -[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] > 0$



Nota

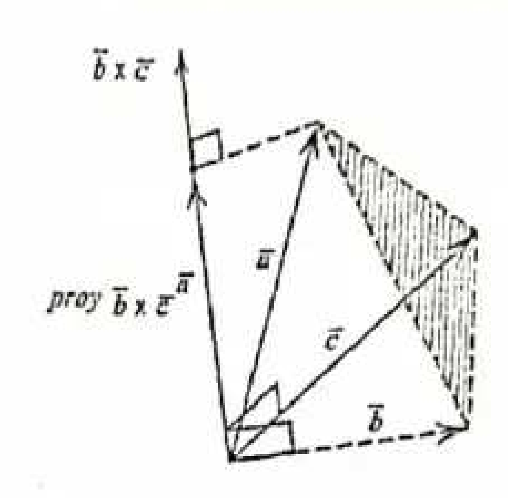
(a) $V = |[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]|$ (volumen del paralelepípedo)

(b) Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] > 0$ significa que con respecto al plano $\mathscr{P}$ determinado por $\bar{b}$ y $\bar{c}$ el paralelepípedo se encuentra al mismo lado de $\bar{b} \times \bar{c}$. Es decir el

paralelepípedo se encuentra encima del plano $\mathscr{P}$.

(c) Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] < 0$ implica con respecto al plano $\mathscr{P}$ que el paralelepípedo y $\bar{b} \times \bar{c}$ están en lados opuestos. Es decir, el paralelepípedo se encuentra debajo del plano $\mathscr{P}$.

8) Volumen de un tetraedro cuyas aristas son los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$



$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(\text{área base})(\text{altura}) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\bar{b} \times \bar{c}|\right)\left|\operatorname{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\bar{a}\right| \\ &= \frac{1}{6}|\bar{b} \times \bar{c}|\left|\frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{\bar{b}\times\bar{c}}\right| \\ &= \frac{1}{6}[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \end{aligned}$$

Por tanto

$$V = \frac{1}{6}|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]|$$

Ejemplo [illegible]

Si $\bar{a} = (1, 3, -1)$, $\bar{b} = (7, 2, 3)$, $\bar{c} = (4, -7, 5)$. Calcular el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$.

Solución.

En efecto

$$[\bar a\ \bar b\ \bar c] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 7 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (10+21) - 3(35-12) - (-49-8) = 19$$



$$V = \left|[\bar a\ \bar b\ \bar c]\right| = 19\ \mathrm{u}^3$$

Ejemplo 4-16

Calcular el volumen del tetraedro cuyas aristas son $\bar a = (1,-1,2)$, $\bar b = (5,1,4)$, $\bar c = (2,-8,0)$

Solución.

$$[\bar a\ \bar b\ \bar c] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 32 + (-8) + 2(-42) = -60$$

$$V = \frac{1}{6}\left|[\bar a\ \bar b\ \bar c]\right| = \frac{1}{6}|-60| = 10\ \mathrm{u}^3$$

Ejemplo 4-17

Probar que $[\bar a\ \bar b\ \bar c] = -[\bar b\ \bar a\ \bar c] = -[\bar a\ \bar c\ \bar b] = -[\bar c\ \bar b\ \bar a]$

Solución.

$$[\bar b\ \bar a\ \bar c] = \bar b\cdot(\bar a\times\bar c) = (\bar b\times\bar a)\cdot\bar c = -(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c = -[\bar a\ \bar b\ \bar c]$$

$$[\bar a\ \bar c\ \bar b] = \bar a\cdot(\bar c\times\bar b) = \bar a\cdot\big(-(\bar b\times\bar c)\big) = -\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = -[\bar a\ \bar b\ \bar c]$$

$$[\bar c\ \bar b\ \bar a] = \bar c\cdot(\bar b\times\bar a) = (\bar c\times\bar b)\cdot\bar a = -(\bar b\times\bar c)\cdot\bar a = -\bar a\cdot(\bar b\times\bar c) = -[\bar a\ \bar b\ \bar c]$$

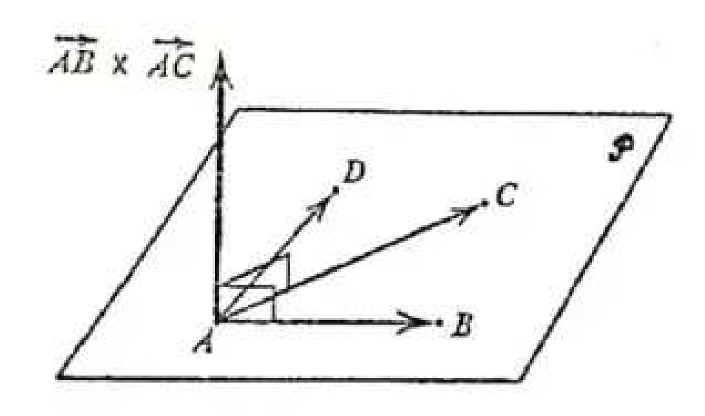
$[\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}] = \bar{c} \cdot (\bar{b} \times \bar{a}) = (\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a} = \ldots$

Ejemplo 4.18

Determinar una condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos distintos sean coplanares.



Solución.



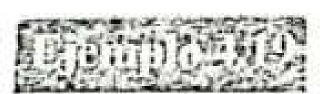
Construimos los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AD} \subset \mathscr{P} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AD} \perp (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})$$

entonces

$$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0 \Longrightarrow [\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}] = 0$$

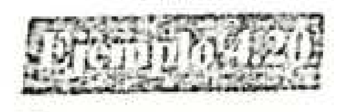
entonces los vectores son coplanares y por supuesto los puntos A, B, C y D están en el mismo plano.



Demostrar que los vectores $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ y $\bar{d}$ son coplanares si $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{0}$

Solución.

En efecto, si $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{0}$ entonces $\bar{a} \times \bar{b} \parallel \bar{c} \times \bar{d}$, luego $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\} \subset \mathscr{P}$.



Demostrar que

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$



Solución.

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$= (b_2c_3 - b_3c_2, b_3c_1 - b_1c_3, b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$
$$= \big(a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3),$$
$$a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1),$$
$$a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2)\big)$$
$$= \big((a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_2b_2 + a_3b_3c_1),$$
$$(a_1c_1 + a_3c_3)b_2 - (a_1b_1 + a_3b_3)c_2,$$
$$(a_1c_1 + a_2c_2)b_3 - (a_1b_1 + a_2b_2)c_3\big)$$
$$= \big((a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1,$$
$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_2 - (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)c_2,$$
$$(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_3 - (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)c_3\big)$$
$$= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1, b_2, b_3) - (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(c_1, c_2, c_3)$$
$$= (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c}$$

Este ejemplo demuestra que el producto vectorial no es asociativo.



Demostrar que

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2;\ \forall \bar{a},\bar{b}\in V_3$$



Solución.
En efecto

$$\begin{aligned}
|\bar{a}\times\bar{b}|^2 &= (\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{b})\\
&= \bar{a}\cdot(\bar{b}\times(\bar{a}\times\bar{b}))\\
&= \bar{a}\cdot((\bar{b}\cdot\bar{b})\bar{a}-(\bar{b}\cdot\bar{a})\bar{b})\\
&= (\bar{a}\cdot\bar{a})(\bar{b}\cdot\bar{b})-(\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{b}\cdot\bar{a})\\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2
\end{aligned}$$

4.1.10 Ejercicios resueltos



Sean los vectores $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}\subset V_3$. Encontrar los vectores $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
\bar{x}\cdot\bar{a}=1 & \bar{y}\cdot\bar{a}=0 & \bar{z}\cdot\bar{a}=0\\
\bar{x}\cdot\bar{b}=0 & \bar{y}\cdot\bar{b}=1 & \bar{z}\cdot\bar{b}=0\\
\bar{x}\cdot\bar{c}=0 & \bar{y}\cdot\bar{c}=0 & \bar{z}\cdot\bar{c}=1
\end{array}$$

Solución.
En efecto

$$\bar{x}\cdot\bar{b}=0 \text{ y } \bar{x}\cdot\bar{c}=0$$

$$\bar{x}\parallel\bar{b}\times\bar{c}$$

$$\bar{x} = \lambda(\bar{b} \times \bar{c})$$

$$\lambda(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = 1$$

luego

$$\lambda = \frac{1}{[\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}]} \Longrightarrow \bar{x} = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{[\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}]}$$





Igualmente

$$\bar{y} = \frac{\bar{a} \times \bar{c}}{[\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}]}, \qquad \bar{z} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{[\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}]}$$

Ejercicio 4.24

1) Si $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{a} \times \bar{c}) = \bar{a}$. Calcular $(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

2) si $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ entonces $\bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c} + \bar{c} \times \bar{a} = 3\bar{a} \times \bar{b}$

Solución.
En efecto

1)

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{a} \times \bar{c}) &= ((\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c})\bar{a} - ((\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{a})\bar{c} \\ &= [\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}]\bar{a} \\ &= \bar{a}\end{aligned}$$

entonces $[\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}] = 1$

$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{b} \times \bar{c}) &= ((\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c})\bar{b} - ((\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{b})\bar{c} \\ &= [\bar{a}\, \bar{b}\, \bar{c}]\bar{b} \\ &= \bar{b}\end{aligned}$$

2) $\bar{c} = -\bar{a} - \bar{b}$

$$\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a}=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times(-\bar{a}-b)+(-\bar{a}-b)\times\bar{a}$$
$$=\bar{a}\times\bar{b}-\bar{b}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{b}-\bar{a}\times\bar{a}-\bar{b}\times\bar{a}$$
$$=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{b}$$
$$=3\bar{a}\times\bar{b}$$



Ejercicio 4.25

Sea $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ un conjunto de vectores positivamente orientados y sea $\Delta=[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3]$. Si

$$\bar{b}_1=\frac{\bar{a}_2\times\bar{a}_3}{\Delta},\qquad \bar{b}_2=\frac{\bar{a}_3\times\bar{a}_1}{\Delta},\qquad \bar{b}_3=\frac{\bar{a}_1\times\bar{a}_2}{\Delta}$$

Demostrar que:

1) $[\bar{b}_1\ \bar{b}_2\ \bar{b}_3]=\frac{1}{\Delta}$

2) $\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\}$ es un conjunto de vectores positivamente orientados

3) Si $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ es un conjunto de vectores unitarios positivamente orientados, ortogonales dos a dos, entonces $\bar{b}_1=\bar{a}_1,\bar{b}_2=\bar{a}_2$ y $\bar{b}_3=\bar{a}_3$

Solución.

Si $\{\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3\}$ es un conjunto de vectores unitarios positivamente orientados entonces $[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3]>0$, es decir $\Delta>0$.

1)
$$[\bar{b}_1\ \bar{b}_2\ \bar{b}_3]=\bar{b}_1\cdot(\bar{b}_2\times\bar{b}_3) \tag{4.46}$$

$$\bar{b}_2\times\bar{b}_3=\frac{1}{\Delta^2}(\bar{a}_3\times\bar{a}_1)\times(\bar{a}_1\times\bar{a}_2)$$
$$=\frac{1}{\Delta^2}((\bar{a}_3\times\bar{a}_1)\cdot\bar{a}_2)\bar{a}_1-\frac{1}{\Delta^2}((\bar{a}_3\times\bar{a}_1)\cdot\bar{a}_1)\bar{a}_2$$
$$=\frac{1}{\Delta^2}[\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3]\bar{a}_1$$
$$=\frac{1}{\Delta}\bar{a}_1$$

En (4.46)

$$\begin{aligned}\bar{b}_1 \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3) &= \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{\Delta} \cdot \frac{1}{\Delta}\bar{a}_1 \\ &= \frac{[\bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3]}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta}\end{aligned}$$

2) $[\bar{b}_1\, \bar{b}_2\, \bar{b}_3] = \frac{1}{\Delta} > 0$ puesto que $\Delta > 0$

3) $[\bar{a}_1\, \bar{a}_2\, \bar{a}_3] > 0$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = 1$, $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0$, $\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 = 0$, $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 = 0$

$$|\bar{a}_1| = 1 \Longrightarrow |\bar{a}_1|^2 = 1$$

entonces

$$|\bar{a}_1|^2 - 1 = 0 \tag{4.47}$$

y

$$\bar{b}_1 \cdot \bar{a}_1 = \left(\frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{\Delta}\right) \cdot \bar{a}_1 = 1 \tag{4.48}$$

(4.48) en (4.47)

$$\begin{aligned}|\bar{a}_1|^2 - \bar{b}_1 \cdot \bar{a}_1 &= 0 \\ (\bar{a}_1 - \bar{b}_1) \cdot \bar{a}_1 &= 0 \\ \bar{a}_1 - \bar{b}_1 &= \bar{0}\end{aligned}$$

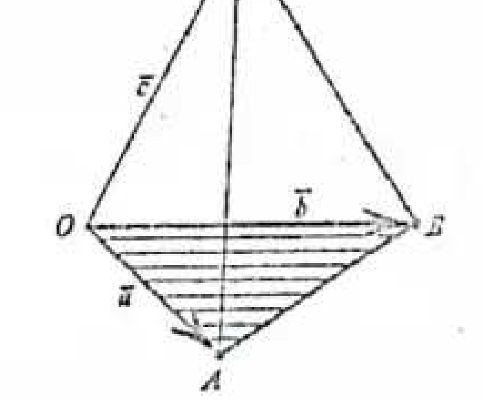
es decir $\bar{a}_1 = \bar{b}_1$. Del mismo modo se puede demostrar que $\bar{a}_2 = \bar{b}_2, \bar{a}_3 = \bar{b}_3$

[illegible]

Cuatro vectores perpendiculares a las caras de un tetraedro y dirigidos hacia el exterior tienen sus módulos iguales a las áreas de las caras respectivas. Calcular su suma.

Solución.







Sea $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$, $\overrightarrow{OB} = \bar{b}$, $\overrightarrow{OC} = \bar{c}$

$$\text{Área } \triangle OAB = \frac{1}{2}|\bar{b} \times \bar{a}| = |\bar{p}_1|$$

$$\text{Área } \triangle OBC = \frac{1}{2}|\bar{c} \times \bar{b}| = |\bar{p}_2|$$

$$\text{Área } \triangle OAC = \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{c}| = |\bar{p}_3|$$

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{1}{2}|(\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} \times \bar{a})| = |\bar{p}_4|$$

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4 = \frac{1}{2}(\bar{b} \times \bar{a}) + \frac{1}{2}(\bar{c} \times \bar{b}) + \frac{1}{2}(\bar{a} \times \bar{c}) + \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a})$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{b} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} + (\bar{b} - \bar{a}) \times (\bar{c} - \bar{a}))$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{b} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} + (\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{c} - (\bar{b} - \bar{a}) \times \bar{a})$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{b} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} - \bar{a} \times \bar{c} - \bar{b} \times \bar{a}) = \bar{0}$$

Ejercicio 4.27

Decir cuáles de las siguientes proposiciones son V o F. Justificar

1) $(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} - 2\bar{y} + 2\bar{z}) \times (4\bar{x} + \bar{y} + 5\bar{z}) = \bar{0}$

2) $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) \iff \bar{c} \times \bar{a} \parallel \bar{b}$

3) El volumen del tetraedro $ABCD$ es un valor numérico igual a

$$\frac{1}{6}([\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] - [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}] - [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}] - [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}])$$

6

donde $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ y $\bar{d}$ son radio vectores asociados a los vértices.

4) Si $\bar{a} = \bar{m} + \bar{n}$ donde $\bar{m} \parallel \bar{b}$ y $\bar{n} \perp \bar{b} \neq \bar{0}$, entonces

$$\bar{m} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b} \quad \text{y} \quad \bar{n} = \frac{(\bar{b} \times \bar{a}) \times \bar{b}}{|\bar{b}|^2}$$



Solución.

1)

$$(\bar{x} - 2\bar{y} + 2\bar{z}) \times (4\bar{x} + \bar{y} + 5\bar{z}) = 9(\bar{x} \times \bar{y}) - 3(\bar{x} \times \bar{z}) - 12(\bar{y} \times \bar{z})$$

$$\begin{aligned} &(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot (\bar{x} - 2\bar{y} + 2\bar{z}) \times (4\bar{x} + \bar{y} + 5\bar{z}) = \\ &(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) \cdot 9(\bar{x} \times \bar{y}) - 3(\bar{x} \times \bar{z}) - 12(\bar{y} \times \bar{z}) \\ &= -12[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] + 3[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] + 9[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(V)}$$

2)

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} \qquad (4.49)$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = -\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = -(\bar{c} \cdot \bar{b})\bar{a} + (\bar{c} \cdot \bar{a})\bar{b} \qquad (4.50)$$

(4.49)=(4.50), entonces

$$(\bar{a} \cdot \bar{c})\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} = (\bar{c} \cdot \bar{a})\bar{b} - (\bar{c} \cdot \bar{b})\bar{a}$$

$$(\bar{c} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{c} = 0 \qquad (4.51)$$

$$(\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} = -\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a})$$

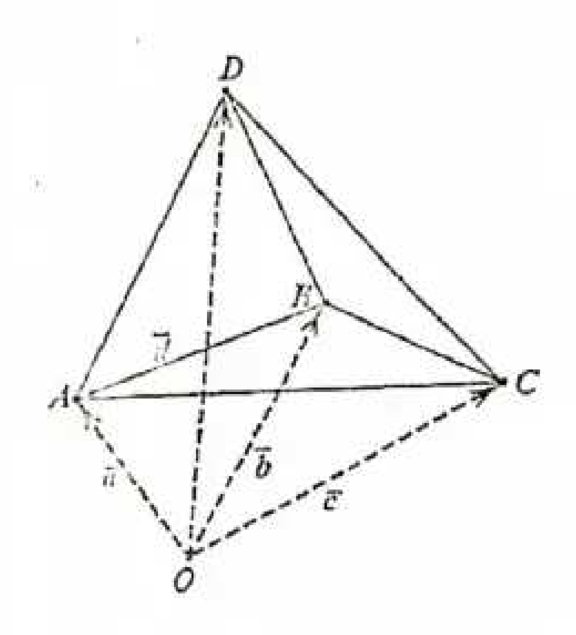
$$= -(\bar{b}\cdot\bar{a})\bar{c} + (\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a}$$
$$= \bar{0}$$

Por el paso (4.51), entonces

$$\bar{c}\times\bar{a} \parallel \bar{b} \qquad \text{(V)}$$



3)



$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}[\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}]\\
&= \frac{1}{6}[(\bar{c}-\bar{a})(\bar{b}-\bar{a})(\bar{d}-\bar{a})]\\
&= \frac{1}{6}(\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{d}-\bar{a}) \qquad (4.52)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\bar{b}-\bar{a})\times(\bar{d}-\bar{a}) &= (\bar{b}-\bar{a})\times\bar{d} - (\bar{b}-\bar{a})\times\bar{a}\\
&= \bar{b}\times\bar{d} - \bar{a}\times\bar{d} - \bar{b}\times\bar{a}
\end{aligned}
$$

$$(\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d} - \bar{a}\times\bar{d} - \bar{b}\times\bar{a})$$
$$= (\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d}) - (\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{a}\times\bar{d}) - (\bar{c}-\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{a})$$

$$= [\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{d}] - [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}] - [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}] - [\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}]$$

En (4.52)

$$V = \frac{1}{6}([\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{d}] - [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}] - [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}] - [\bar{c}\ \bar{b}\ \bar{a}])$$
$$= \frac{1}{6}([\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] - [\bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}] - [\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{d}] - [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]) \qquad (V)$$

4) $\bar{m} \parallel \bar{b}$ entonces $\bar{m} = r\bar{b}, \bar{n}\cdot\bar{b} = 0, \bar{b} \neq \bar{0}$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (\bar{m}+\bar{n})\cdot\bar{b} = \bar{m}\cdot\bar{b} + \bar{n}\cdot\bar{b} = \bar{m}\cdot\bar{b} = (r\bar{b})\cdot\bar{b} = r|\bar{b}|^2$$

entonces $r = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}$. Luego

$$\bar{m} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|^2}\bar{b}$$

$$\bar{b}\times\bar{a} = \bar{b}\times(\bar{m}+\bar{n}) = \bar{b}\times\bar{m} + \bar{b}\times\bar{n} = \bar{b}\times\bar{n}$$

$$\begin{aligned}(\bar{b}\times\bar{a})\times\bar{b} &= (\bar{b}\times\bar{n})\times\bar{b}\\ &= -\bar{b}\times(\bar{b}\times\bar{n})\\ &= -((\bar{b}\cdot\bar{n})\bar{b} - (\bar{b}\cdot\bar{b})\bar{n})\\ &= |\bar{b}|^2\bar{n} - (\bar{b}\cdot\bar{n})\bar{b}\\ &= |\bar{b}|^2\bar{n}\end{aligned}$$

$$\bar{n} = \frac{(\bar{b}\times\bar{a})\times\bar{b}}{|\bar{b}|^2} \qquad (V)$$

Ejercicio 4.3

1) Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ y $\bar{d}$ vectores en V_3 tales que $\bar{a}\times\bar{b} = \bar{c}\times\bar{d}$, $\bar{a}\times\bar{c} = \bar{b}\times\bar{d}$. D.q. $\bar{a}-\bar{d}$ y $\bar{b}-\bar{c}$ son paralelos.

2) D.q. $|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]| \leq |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|$. ¿En qué caso se verifica la igualdad?

Solución.

1)

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d} \Longrightarrow \bar{a} \times \bar{b} - \bar{c} \times \bar{d} = \bar{0}$$

$$\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d} \Longrightarrow \bar{a} \times \bar{c} - \bar{b} \times \bar{d} = \bar{0}$$



entonces

$$\bar{a} \times \bar{b} - \bar{c} \times \bar{d} = \bar{a} \times \bar{c} - \bar{b} \times \bar{d}$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} - \bar{c}) = (\bar{c} - \bar{b}) \times \bar{d}$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} - \bar{c}) = \bar{d} \times (\bar{b} - \bar{c})$$

$$(\bar{a} - \bar{d}) \times (\bar{b} - \bar{c}) = \bar{0}$$

por tanto

$$\bar{a} - \bar{d} \parallel \bar{b} - \bar{c}$$

2)

$$|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]| = |\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})| \leq |\bar{a}||\bar{b} \times \bar{c}| \text{ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)}$$

$$|[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]| \leq |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}| \operatorname{sen} \theta; \quad \theta \in [0, \pi]$$

$$|[\bar{a}\ \bar{b}\bar{c}]| = |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}| \text{ si } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ y } \bar{b} \perp \bar{c},\ \bar{c} \perp \bar{a} \text{ y } \bar{a} \perp \bar{b}$$

(cuando los vectores son ortogonales entre sí)



Ejercicio 4.129

Probar que

1)

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) \times (\bar{e} \times \bar{f}) = \begin{vmatrix} [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}] & [\bar{d}\ \bar{e}\ \bar{f}] \\ [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] & [\bar{c}\ \bar{e}\ \bar{f}] \end{vmatrix}$$

2)

$$((\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) + (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot (\bar{a} \times \bar{d}) + (\bar{c} \times \bar{a}).(\bar{b} \times \bar{d}))\bar{v} = \bar{0}, \quad \forall \bar{v} \in V_3$$

Solución.

1)

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})\times(\bar{e}\times\bar{f}) = (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})\cdot(\bar{e}\times\bar{f})$$
$$= \left(((\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d})\bar{c} - ((\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c})\bar{d}\right)\cdot(\bar{e}\times\bar{f})$$
$$= \left([\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}]\bar{c} - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\bar{d}\right)\cdot(\bar{e}\times\bar{f})$$



$$= [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}][\bar{c}\;\bar{e}\;\bar{f}] - [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}][\bar{d}\;\bar{e}\;\bar{f}]$$
$$= \begin{vmatrix} [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{d}] & [\bar{d}\;\bar{e}\;\bar{f}] \\ [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}] & [\bar{c}\;\bar{e}\;\bar{f}] \end{vmatrix}$$

2) D.q.

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{b}\times\bar{d}) + (\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d}) + (\bar{c}\times\bar{a}).(\bar{b}\times\bar{d}) = 0$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) = (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}\cdot\bar{d}$$
$$= -\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d}$$
$$= (-(\bar{c}\cdot\bar{b})\bar{a} + (\bar{c}\cdot\bar{a})\bar{b})\cdot\bar{d}$$
$$= -(\bar{c}\cdot\bar{b})(\bar{a}\cdot\bar{d}) + (\bar{c}\cdot\bar{a})(\bar{b}\cdot\bar{d})$$

$$(\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d}) = (\bar{b}\times\bar{c})\times\bar{a}\cdot\bar{d}$$
$$= -\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{d}$$
$$= (-(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} + (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c})\cdot\bar{d}$$
$$= -(\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d}) + (\bar{a}\cdot\bar{b})(\bar{c}\cdot\bar{d})$$

$$(\bar{c}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d}) = (\bar{c}\times\bar{a})\times\bar{b}\cdot\bar{d}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{d} \\
&= (-(\bar{b} \cdot \bar{a})\bar{c} + (\bar{b} \cdot \bar{c})\bar{a}) \cdot \bar{d} \\
&= -(\bar{b} \cdot \bar{a})(\bar{c} \cdot \bar{d}) + (\bar{b} \cdot \bar{c})(\bar{a} \cdot \bar{d})
\end{aligned}
$$

Sumando los términos, el resultado es cero.



Ejercicio 4.30

Si $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \neq 0$ D.q. $\forall \bar{v} \in V_3$

$$(\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}))\bar{v} = (\bar{v}.(\bar{b} \times \bar{c}))\bar{a} + (\bar{v} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}))\bar{b} + (\bar{v} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}))\bar{c}$$

Solución.

Si $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\bar{v} = r\bar{a} + t\bar{b} + m\bar{c} \tag{4.53}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) &= r\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \Longrightarrow r = \frac{\bar{v} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]} \\
\bar{v} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) &= t\bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) \Longrightarrow t = \frac{\bar{v} \cdot (\bar{c} \times \bar{a})}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]} \\
\bar{v} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) &= m\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) \Longrightarrow m = \frac{\bar{v} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (4.53)

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{v} = (\bar{v} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}))\bar{a} + (\bar{v} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}))\bar{b} + (\bar{v} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}))\bar{c}$$

Ejercicio 4.31

Cuál es la condición que deben tener los vectores $\bar{m}$ y $\bar{n}$ para que

$$\bar{a} \times (\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})) \cdot \bar{c} + |\bar{a}|^2(\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c}) = \bar{m} \cdot \bar{n} \tag{4.54}$$

Solución.

$$\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{b}$$

$$\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} - (\bar{a} \cdot \bar{a})\bar{b}$$
$$= (\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} - |\bar{a}|^2 \bar{b}$$

$$\bar{a} \times (\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b})) = \bar{a} \times ((\bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} - |\bar{a}|^2 \bar{b})$$
$$= -|\bar{a}|^2 (\bar{a} \times \bar{b})$$
$$= |\bar{a}|^2 (\bar{b} \times \bar{a})$$

$$\bar{a} \times \bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a}|^2 (\bar{b} \times \bar{a}) \cdot \bar{c}$$
$$= -|\bar{a}|^2 (\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}))$$

En (4.54)

$$\bar{m} \cdot \bar{n} = 0 \Longrightarrow \bar{m} \perp \bar{n}$$



Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} |\bar{a}|^2 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & |\bar{b}|^2 & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & |\bar{c}|^2 \end{vmatrix}$$

Hallar los α_{ij} si $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$

Solución.

$|A| = |A^T|$

$$AA^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{pmatrix}$$

$$|A|^2 = |A||A^T| = \begin{vmatrix} |\bar{a}|^2 & \bar{a} \cdot \bar{b} & \bar{a} \cdot \bar{c} \\ \bar{a} \cdot \bar{b} & |\bar{b}|^2 & \bar{b} \cdot \bar{c} \\ \bar{a} \cdot \bar{c} & \bar{b} \cdot \bar{c} & |\bar{c}|^2 \end{vmatrix}$$

donde

$$\alpha_{12} = \bar{a} \cdot \bar{b} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{13} = \bar{a} \cdot \bar{c} = \alpha_{31}$$

$$\alpha_{23} = \bar{b} \cdot \bar{c} = \alpha_{32}$$



Ejercicio 4.33

D.q.

$$\begin{vmatrix} \bar{A}\cdot\bar{a} & \bar{A}\cdot\bar{b} & \bar{A}\cdot\bar{c} \\ \bar{B}\cdot\bar{a} & \bar{B}\cdot\bar{b} & \bar{B}\cdot\bar{c} \\ \bar{C}\cdot\bar{a} & \bar{C}\cdot\bar{b} & \bar{C}\cdot\bar{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2$$

Si

$$\bar{A} = x_1\bar{a} + y_1\bar{b} + z_1\bar{c}$$

$$\bar{B} = x_2\bar{a} + y_2\bar{b} + z_2\bar{c}$$

$$\bar{C} = x_3\bar{a} + y_3\bar{b} + z_3\bar{c}$$

Solución.

En efecto, sea $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\bar{A} = x_1(a_1, a_2, a_3) + y_1(b_1, b_2, b_3) + z_1(c_1, c_2, c_3)$$

$$\bar{B} = x_2(a_1, a_2, a_3) + y_2(b_1, b_2, b_3) + z_2(c_1, c_2, c_3)$$

$$\bar{C} = x_3(a_1, a_2, a_3) + y_3(b_1, b_2, b_3) + z_3(c_1, c_2, c_3)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= (x_1a_1 + y_1b_1 + z_1c_1, x_1a_2 + y_1b_2 + z_1c_2, x_1a_3 + y_1b_3 + z_1c_3) \\ &= (A_1, A_2, A_3) \\ \bar{B} &= (x_2a_1 + y_2b_1 + z_2c_1, x_2a_2 + y_2b_2 + z_2c_2, x_3a_3 + y_3b_3 + z_3c_3) \\ &= (B_1, B_2, B_3) \\ \bar{C} &= (x_3a_1 + y_3b_1 + z_3c_1, x_3a_2 + y_3b_2 + z_3c_2, x_3a_3 + y_3b_3 + z_3c_3) \\ &= (C_1, C_2, C_3) \end{aligned}$$



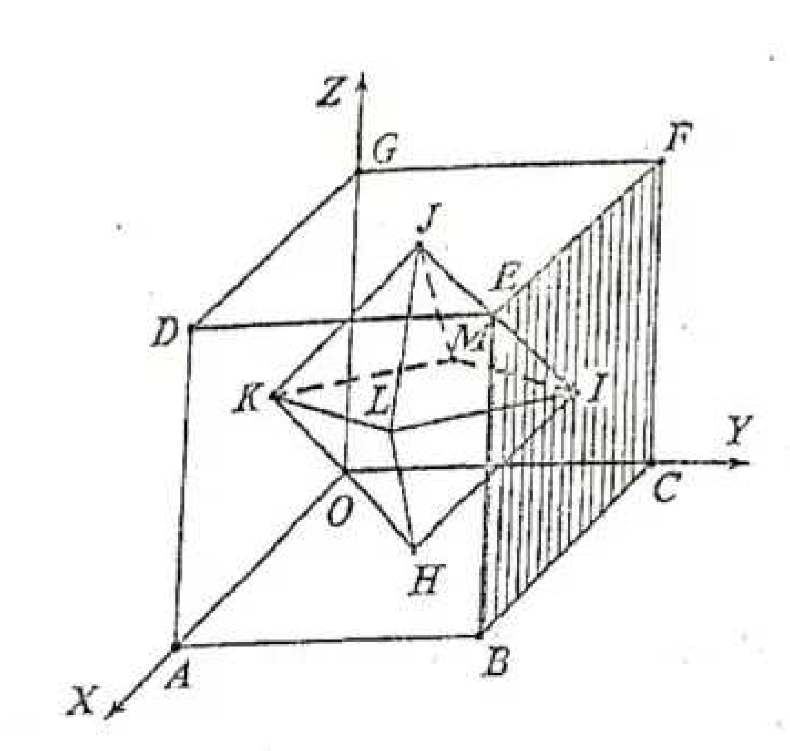
Un octaedro está inscrito en un exaedro regular de arista a de modo que cada vértice es tangente en el centro de una cara del exaedro. Calcular

1) El área lateral del octaedro.



2) El volumen del octaedro.

Solución.



$A = (a, 0, 0)$ $\qquad$ $H = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$

$B = (a, a, 0)$ $\qquad$ $I = (\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2})$

$C = (0, a, 0)$ $\qquad$ $J = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, a)$

$D = (a, 0, a)$ $\qquad$ $K = (\frac{a}{2}, a, \frac{a}{2})$

$E = (a, a, a)$ $\qquad$ $L = (a, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$

$F = (0, a, a)$ $\qquad$ $M = (0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$

$G = (0, 0, a)$

1)

$$\text{área lateral} = 8(\text{área}\triangle KLH)$$

$$= 8(\frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}|)$$

$$= 4|\bar{a} \times \bar{b}| \qquad (4.55)$$



$$\bar{a} = \overrightarrow{KH} = H - K = (0, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$$

$$\bar{b} = \overrightarrow{KL} = L - K = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \frac{a}{2} & -\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{a^2}{4}\right) - j\left(\frac{a^2}{4}\right) + k\left(-\frac{a^2}{4}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4}(1, -1, -1)$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Reemplazando en (4.55)

$$\text{área lateral} = \sqrt{3}a^2$$

2)

$$V_{J-KLIM} = V_1$$

$$= \frac{1}{3}(\text{área base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{3}|\overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KM}|\left|\text{proy}_{\bar{n}}\,\overrightarrow{KJ}\right| \qquad (4.56)$$

$\bar{n}$ vector normal al plano $KLIM$

$$\overrightarrow{KM} = (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0)$$

$$\overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KM} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^2}{2}(0, 0, 1)$$

$$|\overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KM}| = \frac{a^2}{2}$$

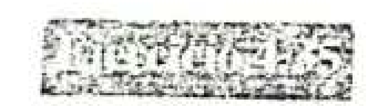
$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{KJ} &= \text{proy}_{\overrightarrow{KL} \times \overrightarrow{KM}} \overrightarrow{KJ} \\ &= \text{proy}_{(0,0,1)} \overrightarrow{KJ} \\ &= \frac{\overrightarrow{KJ} \cdot (0, 0, 1)}{1}(0, 0, 1) \\ &= \frac{a}{2}(0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$|\text{proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{KJ}| = \frac{a}{2}$$

En (4.56)

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{2}\right)\frac{a}{2} = \frac{a^3}{12}$$

$$\text{volumen total} = 2V_1 = \frac{a^3}{6}$$



Sean $\overline{AR}$, $\overline{AS}$ y $\overline{AT}$ las medianas de las caras laterales del tetraedro $OABC$.

1) En qué razón se encuentran los volúmenes de los sólidos $OABC$ y $ACTSR$.

2) P divide a la mediana $\overline{AR}$ en la razón $\frac{1}{3}$, Q divide la mediana $\overline{AT}$ en la razón $-\frac{5}{2}$ y

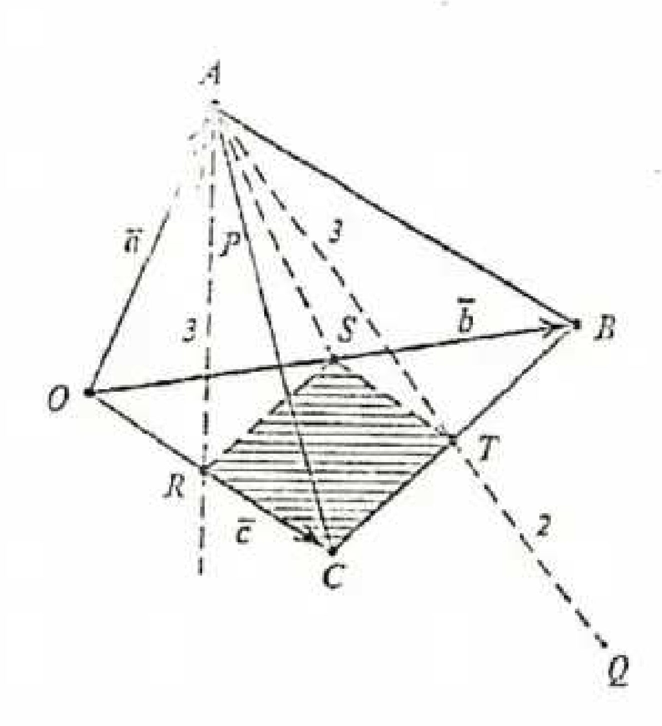
$$\overrightarrow{PQ} = r\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC}.$$

Calcular $8(m+n+r)$





Solución.



1)

$$\begin{aligned}
V_1 &= \text{Volumen del tetraedro } O - ABC \\
&= \frac{1}{3}(\text{área base})(\text{altura}) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\bar{c}\times\bar{b}|\right)\left|\text{comp}_{\bar{c}\times\bar{b}}\,\bar{a}\right| \\
&= \frac{1}{6}|\bar{c}\times\bar{b}|\left|\frac{\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{b})}{|\bar{c}\times\bar{b}|}\right| \\
V_1 &= \frac{1}{6}|[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]|
\end{aligned}$$

V_2 = volumen de la pirámide $A - CTSR$

$$= \frac{1}{3}(\text{área base})(\text{altura})$$
$$= \frac{1}{3}(\square CRST)(\text{altura})$$
$$= \frac{1}{6}(\triangle OBC)\left|\text{proy}_{\bar{c}\times\bar{b}}\,\bar{a}\right|$$
$$= \frac{1}{6}\left|\frac{1}{2}(\bar{c}\times\bar{b})\right|\left|\text{comp}_{\bar{c}\times\bar{b}}\,\bar{a}\right|$$





$$= \frac{1}{12}|\bar{c}\times\bar{b}|\left|\frac{\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{b})}{|\bar{c}\times\bar{b}|}\right|$$
$$= \frac{1}{12}\left|[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\right|$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{6}\left|[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\right|}{\frac{1}{12}\left|[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]\right|} = 2$$

2)

$$\frac{AP}{PR} = \frac{1}{3},\; \frac{AQ}{QT} = -\frac{5}{2} \Longrightarrow \frac{AT}{TQ} = \frac{3}{2}$$
$$\overrightarrow{PQ} = r\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC} \Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = r\bar{a} + m\bar{b} + n\bar{c}$$

$\triangle PAQ$:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ}$$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TQ}$$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AT} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AT}$$
$$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AT} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AT}$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC})\right) + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})\right)$$
$$= -\frac{1}{8}(-\bar{a} + \bar{c} - \bar{a}) + \frac{5}{6}(\bar{c} - \bar{a} + \bar{b} - \bar{a})$$

$$= -\frac{17}{12}\bar{a} + \frac{5}{6}\bar{b} + \frac{17}{24}\bar{c}$$

$$r = -\frac{17}{12},\ m = \frac{5}{6},\ n = \frac{17}{24} \Longrightarrow 8(r+m+n) = 1$$



4.1.11 Ejercicios propuestos

1) Demostrar que

   (a) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{b}\times\bar{c})\times(\bar{c}\times\bar{a}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2$
   (b) $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{a}\times\bar{c}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{a}$
   (c) Si $\bar{a} = \bar{b}\times\bar{c} \Longrightarrow [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = |\bar{a}|^2|\bar{b}\times\bar{c}|^2$
   (d) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) + \bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a}) + \bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{0}$
   (e) $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) = [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]\bar{c} - [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{d}$
   (f) $\bar{a}\times(\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})) = (\bar{a}\cdot\bar{a})(\bar{b}\times\bar{a})$
   (g) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d}) - (\bar{a}\cdot\bar{d})(\bar{c}\cdot\bar{b})$

2) Calcular $\bar{x}$, si $\bar{x}\times\bar{a} = \bar{b} - \bar{x}$

3) Dados dos vectores ortogonales $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_3 y un escalar r, demostrar que la solución en $\bar{x}$ de las ecuaciones $\bar{a}\cdot\bar{x} = r$, $\bar{a}\times\bar{x} = \bar{b}$ es única. Encontrar dicha solución.

4.2 Espacio euclidiano tridimensional

A fin de distinguir la terminología que vamos a introducir y para llegar a comprender la forma en que el álgebra de vectores se aplica en geometría, insistiremos en los siguientes conceptos.

Al definir el espacio vectorial tridimensional V_3, tal vez el lector notó que tanto los vectores como los puntos se representan analíticamente mediante ternas ordenadas

de números reales. Para los vectores, los números son las componentes y para los puntos son las coordenadas. Por tanto, aún cuando en términos geométricos los puntos y los vectores en el espacio son diferentes clases de objetos, analíticamente forman la misma clase, es decir, ternas ordenadas de números reales. El lenguaje que se utilice dependerá de cuál sea la aplicación que el lector tiene en mente. Si

$$P = (x, y, z) \text{ es un punto en } \mathbb{R}^3,$$

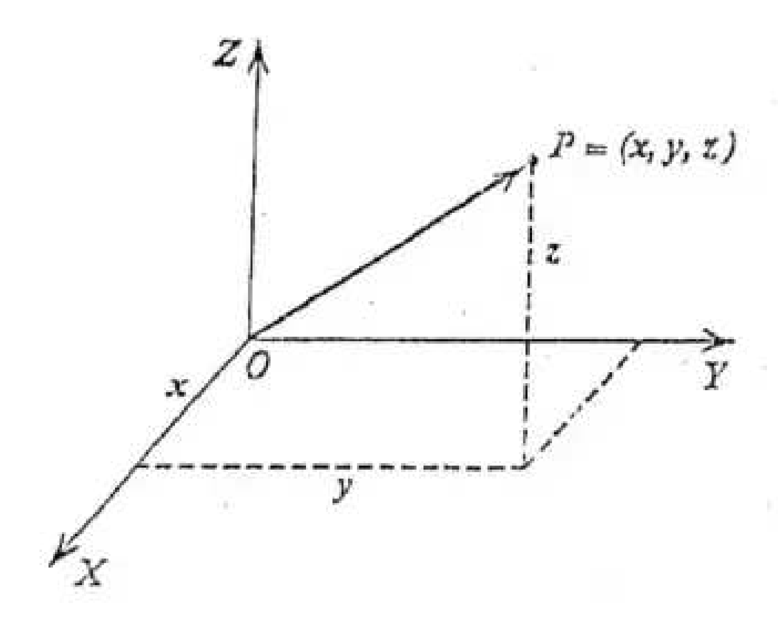


$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z) \text{ es un radio vector en } V_3$$

Si denotamos el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ debemos entender que el vector se está utilizando para representar una dirección y una magnitud.

Ahora estamos en condiciones de presentar una descripción detallada de nuestro modelo analítico del espacio euclidiano. Llamamos a este modelo "espacio euclidiano tridimensional" y para ello, introducimos una terminología para conceptos geométricos tales como: punto, recta, plano y distancia.

Un punto $P = (x, y, z)$ se visualiza como el radio vector $\overrightarrow{OP}$ con punto inicial el origen de coordenadas O y punto terminal P. Por ello (x, y, z) se llaman coordenadas del punto P.



Una recta está determinada por un punto P_0 y un vector $\bar{a} \neq \bar{0}$ en V_3.

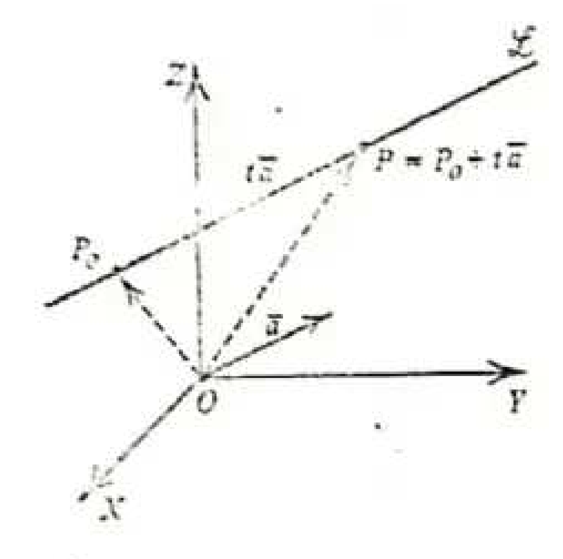
En la figura

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$
$$P = P_0 + t\bar{a}$$

entonces $\mathscr{L} = \{P = P_0 + t\bar{a} / t \in \mathbb{R}\}$ es la recta que pasa por P_0 y es paralela al vector $\bar{a} \neq \bar{0}$. P_0 se llama **punto de paso** y $\bar{a}$ es el **vector direccional** de la recta $\mathscr{L}$





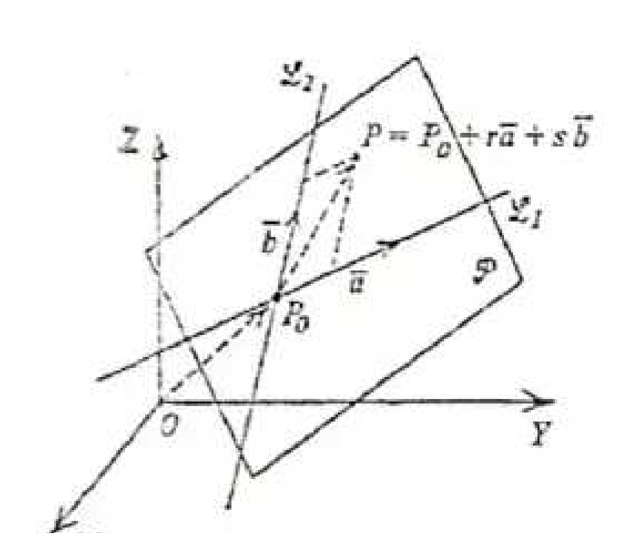


Un plano queda determinado por dos rectas no paralelas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ con vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$, respectivamente, que se intersecan en un punto P_0.

En la figura

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$
$$P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b}$$

entonces $\mathscr{P} = \{P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} / r, s \in \mathbb{R} \text{ y } \bar{a} \nparallel \bar{b}\}$ es el plano que pasa por P_0 paralelo a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.



X

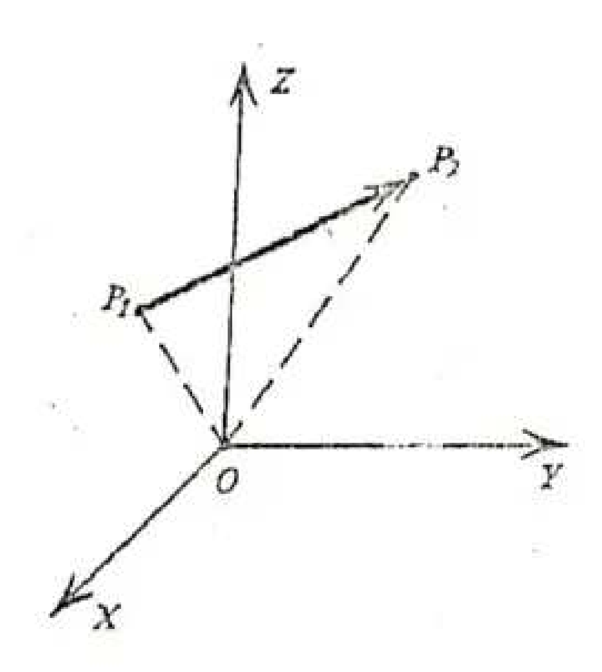
La distancia de P_1 a P_2, denotada por $d(P_1, P_2)$ se define como la longitud del vector $\overrightarrow{P_1 P_2}$. Entonces

$$d(P_1, P_2) = |\overrightarrow{P_1 P_2}|$$
$$= |P_2 - P_1|$$





En la figura



$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = P_2 - P_1$$
$$|\overrightarrow{P_1 P_2}| = |P_2 - P_1|$$

Estos conceptos geométricos nos permiten precisar la siguiente definición

Definición 4.20

El **espacio euclidiano tridimensional**, denotado por $\mathbb{R}^3$ es el espacio vectorial tridimensional V_3 donde:

1) Los radio vectores (x, y, z) de V_3 son los puntos de $\mathbb{R}^3$.

2) Un conjunto $\mathscr{L}$ de puntos de $\mathbb{R}^3$ es una recta, si existe un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y un vector no nulo $\vec{a} \in V_3$ tal que

$$\mathscr{L} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + t\bar{a},\ t \in \mathbb{R}\}$$

3) Un conjunto $\mathscr{P}$ de puntos de $\mathbb{R}^3$ es un plano, si existe un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y dos vectores no paralelos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ de V_3 tales que

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b},\ r, s \in \mathbb{R}\}$$



4) La distancia del punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ al punto $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ denotada por $d(P_1, P_2)$ es la longitud del vector $\overrightarrow{P_1 P_2}$, es decir

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= |\overrightarrow{P_1 P_2}| = |P_2 - P_1| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned}$$

Observación.

1) Las ecuaciones

$$P = P_0 + t\bar{a}$$
$$P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b}$$

se llaman **ecuaciones vectoriales** de la recta y el plano respectivamente.

2) Si $P = (x, y, z)$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mathscr{L}: \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases};\quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{P}: \begin{cases} x = x_0 + ra_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ra_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ra_3 + sb_3 \end{cases};\quad r, s \in \mathbb{R}$$

se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta y el plano respectivamente.

3)

$$\mathscr{L}: \quad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

se llama ecuación simétrica de la recta $\mathscr{L}$.

4) Si una recta $\mathscr{L}$ pasa por los puntos distintos P_0 y P_1, entonces

$$\mathscr{L} = \{P_0 + t(P_1 - P_0)/t \in \mathbb{R}\}$$

Si un plano $\mathscr{P}$ pasa por los puntos no colineales P_0, P_1 y P_2, entonces

$$\mathscr{P} = \{P_0 + r(P_1 - P_0) + s(P_2 - P_0)/r, s \in \mathbb{R}\}$$



5) En $\mathscr{P} = \{P_0 + r\bar{a} + s\bar{b}/r, s \in \mathbb{R}\}$ hay que tener presente que $\bar{a} \nparallel \bar{b}$

Ejemplo [illegible]

1) Mostrar que los puntos $A = (2, 1, 5)$, $B = (8, -2, 0)$, $C = (14, -5, -5)$ son colineales. En efecto,

$$\overrightarrow{AB} = (6, -3, -5), \qquad \overrightarrow{AC} = (12, -6, -10) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$$

entonces A, B y C son colineales.

2) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que tres puntos P_0, P_1 y P_2 sean colineales?

$$\overrightarrow{P_0P_1} \parallel \overrightarrow{P_0P_2}$$

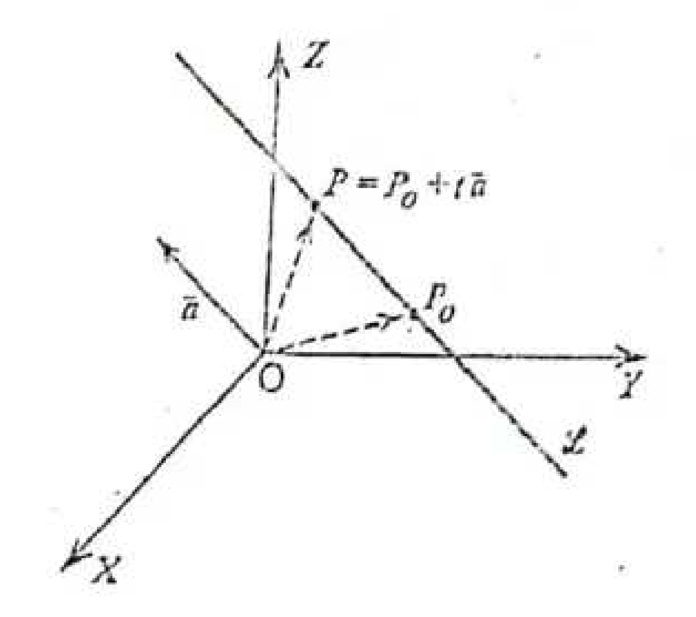
Es decir si dos vectores con el mismo punto inicial son paralelos.

4.2.1 La recta

Definición [illegible]

Dado un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y un vector no nulo $\bar{a} \in V_3$, la recta que pasa por P_0 y es paralela al vector $\bar{a}$, es el siguiente conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{L} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + t\bar{a}, t \in \mathbb{R}\}$$





En la figura

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$P = P_0 + t\bar{a}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L} = \{P = P_0 + t\bar{a}/t \in \mathbb{R}\}$$

se llama ecuación vectorial de la recta $\mathscr{L}$ con punto de paso P_0 y vector direccional $\bar{a}$.

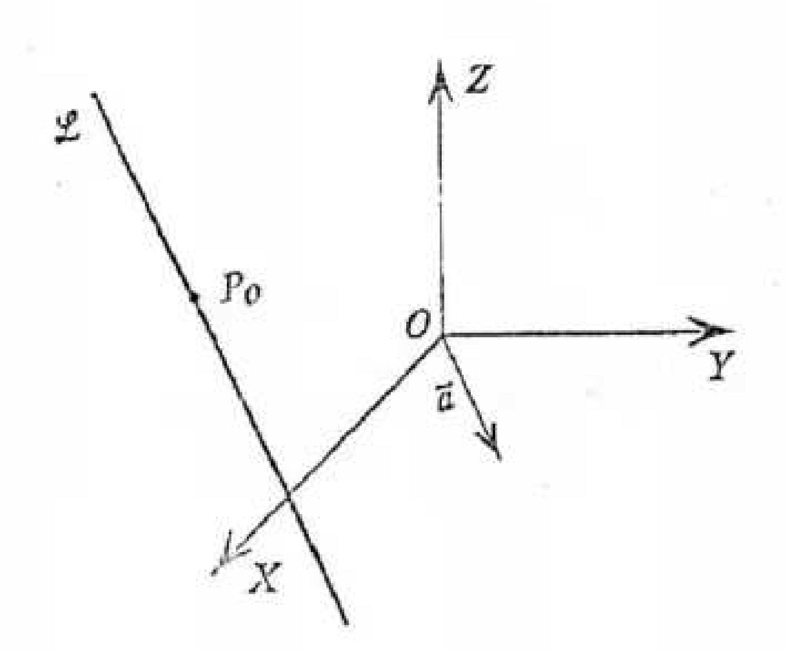
Ejemplo 4.23

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(7, -3, 5)$ y es paralela al vector $(1, 2, -4)$

Solución.

$P_0 = (7, -3, 5)$ y $\bar{a} = (1, 2, -4)$

$$\mathscr{L} = \{P \in \mathbb{R}^3/P = (7, -3, 5) + t(1, 2, -4)\}$$



Enseguida averiguamos si los puntos $Q = (9, 1, -3)$ y $R = (2, 5, 8)$ pertenecen a la recta $\mathscr{L}$.

$Q = (9, 1, -3) \in \mathscr{L}$ entonces $Q = P_0 + t\bar{a}$, para algún $t \in \mathbb{R}$

$$(9, 1, -3) = (7, -3, 5) + t(1, 2, -4)$$

luego:

$$9 = 7 + t$$
$$1 = -3 + 2t$$
$$-3 = 5 - 4t$$

entonces $t = 2$ satisface las tres ecuaciones, por tanto $Q \in \mathscr{L}$.

$R = (2, 5, 8) \in \mathscr{L}$ entonces $R = P_0 + r\bar{a}$, para algún $r \in \mathbb{R}$

$$(2, 5, 8) = (7, -3, 5) + r(1, 2, -4)$$

entonces

$$2 = 7 + r$$
$$5 = -3 + 2r$$
$$8 = 5 - 4r$$

Observamos que no existe $r \in \mathbb{R}$ que satisface las tres ecuaciones, por tanto $R \notin \mathscr{L}$.

[illegible]

Si $\mathscr{L} = \{P_0 + t\bar{a} / t \in \mathbb{R}\}$ entonces

$$Q \in \mathscr{L} \iff (Q - P_0) \parallel \bar{a}$$

Demostración. $\Rightarrow$) $Q \in \mathscr{L}$, entonces $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q = P_0 + t\bar{a}$$
$$Q - P_0 = t\bar{a}$$

entonces $(Q - P_0) \parallel \bar{a}$.

$\Leftarrow$) Si $Q - P_0 \parallel \bar{a}$, entonces

$$Q - P_0 = r\bar{a}, \text{ para algún } r \in \mathbb{R}$$
$$Q = P_0 + r\bar{a}$$

entonces $Q \in \mathscr{L}$. ◇

Ejemplo 4.24

Usando el Lema 4.1, averiguamos si los puntos $Q = (9, 1, -3)$ y $R = (2, 5, 8)$ pertenecen o no a la recta $\mathscr{L}$ del Ejemplo (4.23)

Solución.

$$\begin{aligned} Q - P_0 &= (9, 1, -3) - (7, -3, 5) \\ &= (2, 4, -8) \parallel (1, 2, -4) = \bar{a} \end{aligned}$$

entonces $Q \in \mathscr{L}$.

$$\begin{aligned} R - P_0 &= (2, 5, 8) - (7, -3, 5) \\ &= (-5, 8, 3) \nparallel (1, 2, -4) = \bar{a} \end{aligned}$$

entonces $R \notin \mathscr{L}$.

Nota

El Lema 4.1 nos proporciona un método muy simple y útil para averiguar si un punto pertenece o no a una recta.

Proposición 4.1

Por dos puntos distintos de $\mathbb{R}^3$ existe una y solo una recta que los contiene.

Esta proposición se demuestra en el siguiente teorema.



Teorema 4.6

Por dos puntos distintos de $\mathbb{R}^3$, existe una y solo una recta que pasa por ellos.

Demostración. Sean P_1 y P_2 dos puntos distintos de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathscr{L} = \{P_1 + t(P_2 - P_1)/t \in \mathbb{R}\}$$

es la ecuación vectorial de la recta que pasa por P_1 y P_2.



Supongamos que existe otra recta $\mathscr{L}' = \{Q_0 + r\bar{a}/r \in \mathbb{R}\}$ que pasa por los puntos P_1 y P_2. Se debe demostrar que $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$.

Si $P_1 \in \mathscr{L}'$ entonces $P_1 = Q_0 + r_1\bar{a}$ para algún $r_1 \in \mathbb{R}$.

Si $P_2 \in \mathscr{L}'$ entonces $P_2 = Q_0 + r_2\bar{a}$ para algún $r_2 \in \mathbb{R}$.

Entonces

$$P_2 - P_1 = (r_2 - r_1)\bar{a}$$

Si $P \in \mathscr{L}$ entonces

$$\begin{aligned} P &= P_1 + t(P_2 - P_1) \text{ para algún } t \in \mathbb{R} \\ P &= (Q_0 + r_1\bar{a}) + t(r_2 - r_1)\bar{a} \\ P &= Q_0 + (r_1 + t(r_2 - r_1))\bar{a} \end{aligned}$$

entonces $P \in \mathscr{L}'$, por lo tanto

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{L}' \tag{4.57}$$

Si $P \in \mathscr{L}'$ entonces

$$\begin{aligned} P &= Q_0 + r\bar{a} \text{ para algún } r \in \mathbb{R} \\ P &= (P_1 - r_1\bar{a}) + r\bar{a} \\ P &= P_1 + (r - r_1)\bar{a}. \\ &= P_1 + \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}(P_2 - P_1) \end{aligned}$$

entonces $P \in \mathscr{L}$, por lo tanto

$$\mathscr{L}' \subset \mathscr{L} \tag{4.58}$$

De (4.57) y (4.58) se deduce que $\mathscr{L}' = \mathscr{L}$, por consiguiente es única ◇



Demostrar que si $P_1 \neq P_2$ entonces

Demostrar que si $P_1 \neq P_2$ entonces

$$\{P \in \mathbb{R}^3 / (P - P_1) \times (P_2 - P_1) = \bar{0}\}$$

es la recta que pasa por P_1 y P_2.



Solución.

$$(P - P_1) \times (P_2 - P_1) = \bar{0} \Longrightarrow (P - P_1) \parallel (P_2 - P_1)$$

entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

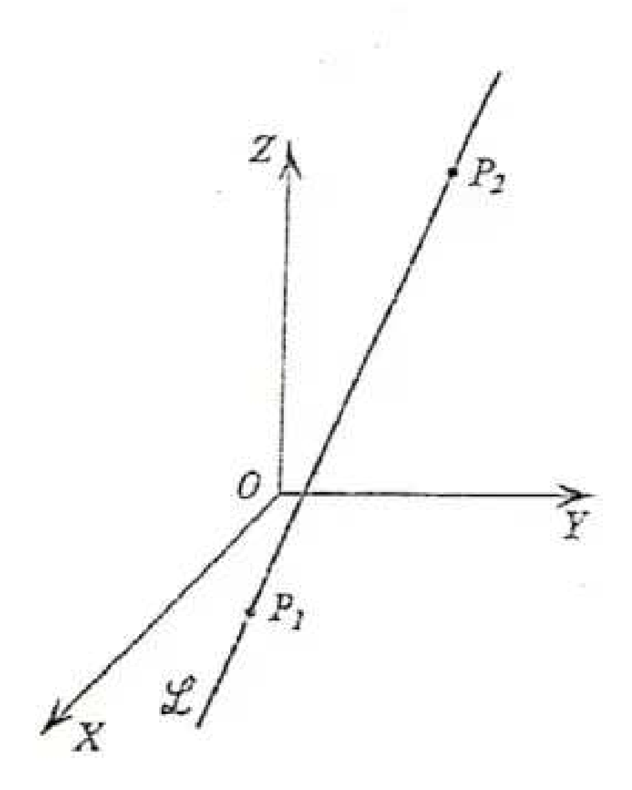
$$P - P_1 = t(P_2 - P_1) \Longrightarrow P = P_1 + t(P_2 - P_1) \qquad (4.59)$$

Si $t \in \mathbb{R}$ entonces (4.59) es la ecuación vectorial de la recta que pasa por P_1 y P_2.

Ejemplo 4.26

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1 = (1, 0, -3)$ y $P_2 = (-5, 2, 7)$

Solución.



$$\mathscr{L} = \{P_1 + t(P_2 - P_1)/t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{L} = \{(1,0,-3) + t(-6,2,10), t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{L} = \{P_2 + r(P_1 - P_2)/r \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{L} = \{(-5,2,7) + r(6,-2,-10)\}$$

Por tanto, ¿cuándo diremos que dos rectas son coincidentes?



Definición 9.24

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \iff \mathscr{L}_1 \subset \mathscr{L}_2 \text{ y } \mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1$$

En efecto:

1) Si $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}/t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{P_0 + r\bar{b}/r \in \mathbb{R}\}$ ($\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen el mismo punto de paso)

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \iff \bar{a} \parallel \bar{b}$$

2) Si $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}/t \in \mathbb{R}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_0 + r\bar{b}/r \in \mathbb{R}\}$ ($\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ tienen diferentes puntos de paso)

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \iff \begin{cases} Q_0 \in \mathscr{L}_1 \text{ y } \bar{a} \parallel \bar{b} \text{ ó} \\ P_0 \in \mathscr{L}_2 \text{ y } \bar{a} \parallel \bar{b} \end{cases}$$



Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,0,-3) + t(-6,2,10)\} \qquad \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a}$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(1,0,-3) + r(-3,1,5)\} \qquad \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b}$$

$\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$ puesto que $\bar{a} \parallel \bar{b}$



Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,0,-3) + r(-3,1,5)\} \qquad \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,0,-3) + r(-3,1,5)\} \qquad \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a}$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(-5,2,7) + k(6,-2,-10)\} \qquad \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b}$$

$P_0 = (1,0,-3),\ Q_0 = (-5,2,7)$

$Q_0 - P_0 = (-6,2,10) \parallel \bar{a} \Longrightarrow Q_0 \in \mathscr{L}_1$

Si $Q_0 \in \mathscr{L}_1$ y $\bar{a} \parallel \bar{b} \Longrightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$



Nota

La ecuación vectorial de la recta es

$$\mathscr{L} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + t\bar{a};\, t \in \mathbb{R}\}$$

Si $P = (x,y,z)$; $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in V_3$, entonces

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a_1,a_2,a_3) \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$$

Definición 4.25

$$\mathscr{L} : \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

se llama ecuaciones paramétricas de la recta $\mathscr{L}$ donde el parámetro es t.

Nota

Si en las ecuaciones paramétricas de la recta despejamos t, entonces

$$t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Definición 4.26

$x - x_0 \qquad y - y_0 \qquad z - z_0$

$$\mathscr{L}: \quad \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

se llama **ecuación simétrica** de la recta $\mathscr{L}$ donde (x_0, y_0, z_0) es el punto de paso y el vector direccional de la recta es $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$.







Si

$$\mathscr{L}: \quad x-3 = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{4}.$$

Determinar la ecuación vectorial de $\mathscr{L}$.

Solución.
$P_0 = (3, -2, 0), \bar{a} = (1, -3, 4)$, entonces

$$\mathscr{L} = \{P = (3, -2, 0) + t(1, -3, 4)/t \in \mathbb{R}\}$$

es la ecuación vectorial de $\mathscr{L}$.



Si

$$\mathscr{L}: \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-5}, \; z = 3$$

Determinar la ecuación vectorial de $\mathscr{L}$

Solución.
$P_0 = (-4, 1, 3); \bar{a} = (2, -5, 0)$, entonces

$$\mathscr{L} = \{P = (-4, 1, 3) + r(2, -5, 0)\}$$

4.2.1.1 Rectas paralelas

Definición 4.22

Dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelas, se denota por $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$ si sus respectivos vectores direccionales son paralelos.

Es decir si $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_0 + r\bar{b}\}$

$$\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \iff \bar{a} \parallel \bar{b}$$

Proposición

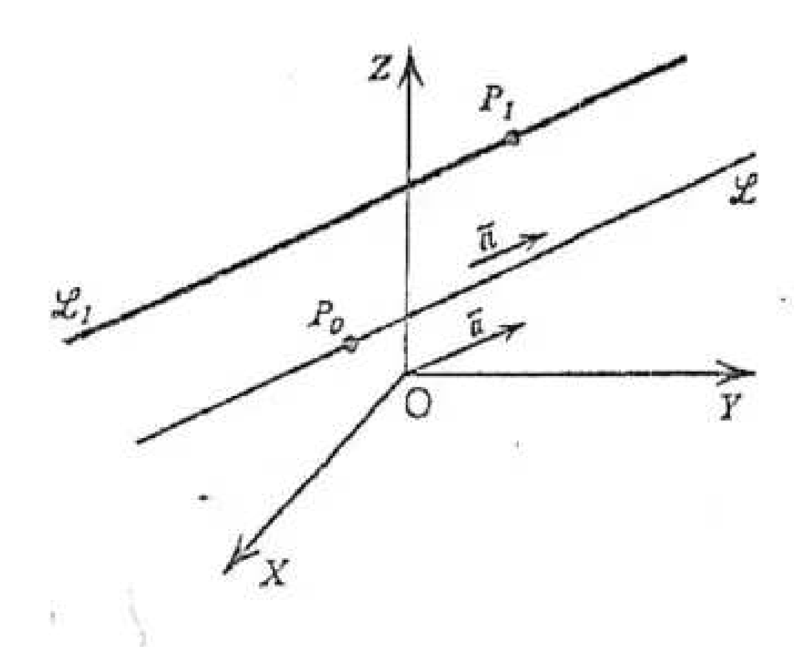
Por un punto puede trazarse una y solo una recta paralela a otra recta dada.

Se demuestra en el siguiente teorema

Teorema 4.7

Para todo $P_1 \in \mathbb{R}^3$ y toda recta $\mathscr{L} = \{P_0 + t\bar{a}/t \in \mathbb{R}\}$ existe una y solamente una recta que pasa por P_1 paralela a $\mathscr{L}$.

Demostración.



Sea $\mathscr{L}_1 = \{P_1 + r\bar{a}/r \in \mathbb{R}\}$ la recta que pasa por P_1 tal que $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}$.
Supongamos que existe otra recta $\mathscr{L}_2 = \{P_2 + k\bar{b}/k \in \mathbb{R}\}$ recta que pasa por P_1 tal que $\mathscr{L}_2 \parallel \mathscr{L}$.
Debemos demostrar que $\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1$.
Puesto que $P_1 \in \mathscr{L}_2$ entonces $P_1 = P_2 + k_1\bar{b}$ para algún $k_1 \in \mathbb{R}$. Además

$$\mathscr{L}_2 \parallel \mathscr{L} \Longrightarrow \bar{b} \parallel \bar{a} \Longrightarrow \exists s \in \mathbb{R}/\bar{b} = s\bar{a}\ \forall s \in \mathbb{R}$$

luego

$$P_1 = P_2 + k_1(s\bar{a}) \Longrightarrow P_1 - P_2 = (k_1 s)\bar{a} \Longrightarrow P_1 - P_2 \parallel \bar{a} \Longrightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1$$

y por tanto $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$. 

Proposición 4.3

Si dos rectas son paralelas en el espacio entonces son coincidentes o la intersección de ellas es vacía. Se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.8

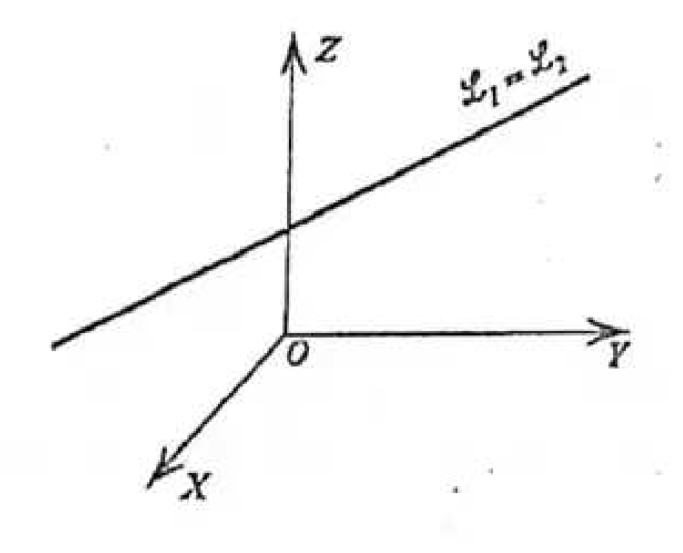
Sean las rectas $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_0 + r\bar{b}\}$ en $\mathbb{R}^3$

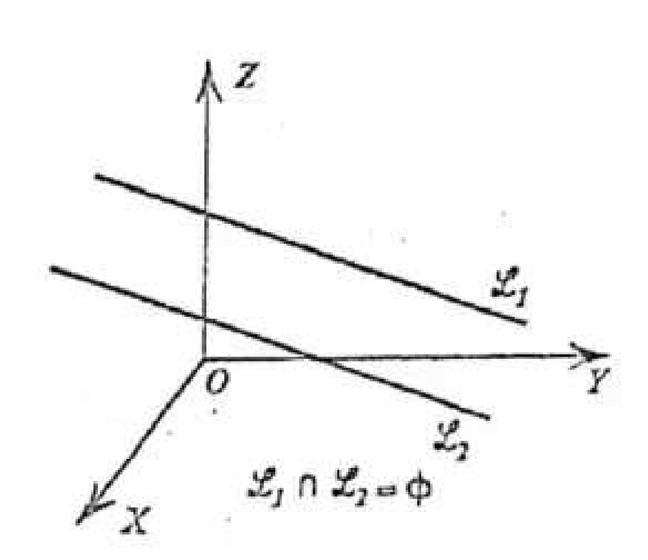
$$\text{Si } \mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2 \Longrightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 \text{ ó } \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$$

Demostración. Supongamos que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \emptyset$, entonces $\exists P \in \mathbb{R}^3$ tal que $P = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$.
Si $P \in \mathscr{L}_1$ entonces $P = P_0 + t_1\bar{a}$ para algún $t_1 \in \mathbb{R}$.
Si $P \in \mathscr{L}_2$ entonces $P = Q_0 + r_2\bar{b}$ para algún $r_2 \in \mathbb{R}$.
Entonces

$$P - P_0 = t_1\bar{a} \Longrightarrow P - P_0 \parallel \bar{a}$$
$$P - Q_0 = r_2\bar{b} \Longrightarrow P - Q_0 \parallel \bar{b}$$

pero $\bar{a} \parallel \bar{b}$ por hipótesis, entonces $P - P_0 \parallel P - Q_0$, luego P_0, Q_0 y P son colineales, es decir $L_1 = L_2$





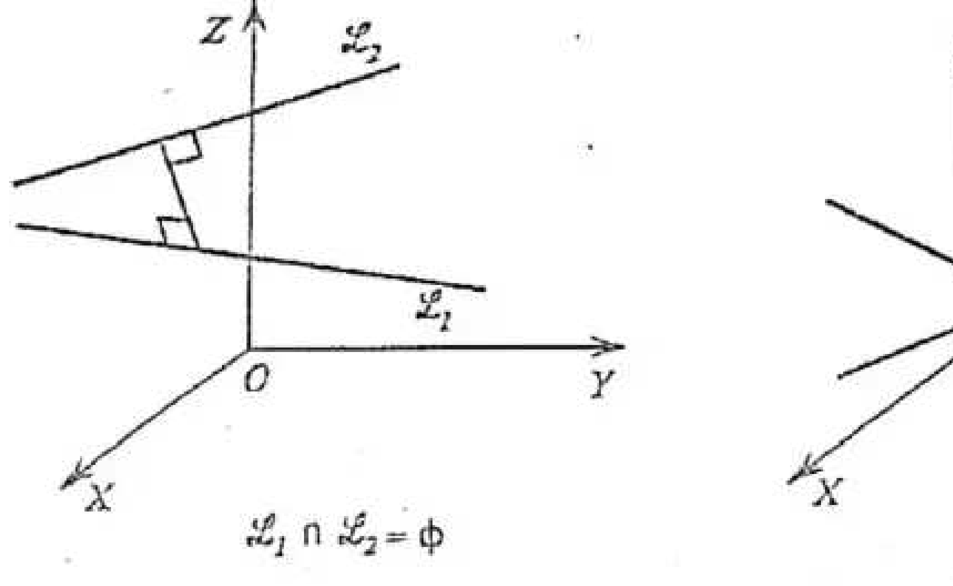
Proposición 4.4

Si dos rectas no son paralelas en el espacio, entonces su intersección es vacía o su intersección es un punto. Se demuestra en el siguiente teorema.

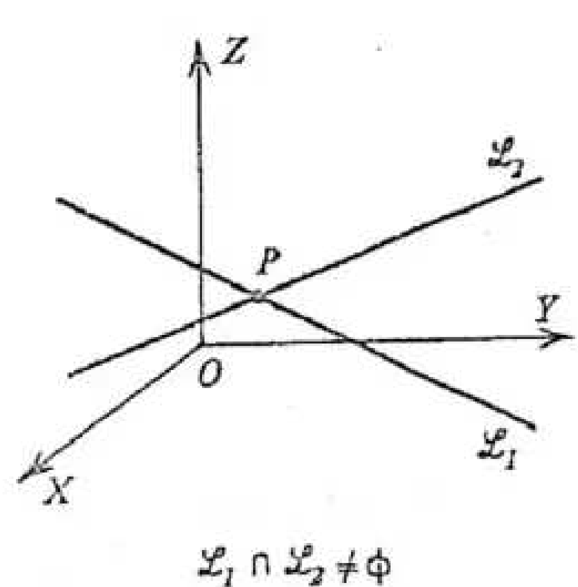
Teorema 4.9

$$Si\, \mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2 \Longrightarrow \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset \text{ ó } \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{P\}$$

Demostración. Supongamos que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ contiene más de un punto, entonces de acuerdo al Teorema 4.6 se tiene que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$, y por tanto $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$ lo que contradice la hipótesis. Luego, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ no pueden ser coincidentes y $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$ no puede contener más de un punto



$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \phi$



$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 \neq \phi$

◇

Nota

1) En la primera figura las rectas se cruzan.

2) En la segunda figura las rectas se intersecan.

Ejemplo

Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,1,-1) + t(-3,6,-12)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(2,3,2) + r(1,-2,4)\}$$

Determinar si las rectas son paralelas y cuál es su intersección.

Solución.

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (-3,6,-12)\\ \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (1,-2,4)\end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{a} = -\frac{1}{3}\bar{b} \Longrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$$

Luego $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$ Para determinar si existe intersección entre las rectas.
Si $P_2 \in \mathscr{L}_1 \Longrightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

$$P_2 - P_1 = (1,2,3) \nparallel \bar{a} \Longrightarrow P_2 \notin \mathscr{L}_1 \Longrightarrow \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$$



Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(2,1,-5) + t(3,1,-1)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(-4,-1,-3) + r(-6,-2,2)\}$$

Determinar si las rectas son paralelas y cuál es su intersección

Solución.
$P_1 = (2,1,-5)$ y $P_2 = (-4,-1,-3)$ son puntos de paso de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ respectivamente

$$\left.\begin{array}{l}\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (3,1,-1)\\ \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (-6,-2,2)\end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{a} = -\frac{1}{2}\bar{b} \Longrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b} \Longrightarrow \mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$$

Si $P_2 \in \mathscr{L}_1$ entonces $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$.
En efecto

$$P_2 - P_1 = (-6,-2,2) \parallel \bar{a} \Longrightarrow P_2 \in \mathscr{L}_1,$$

por tanto $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$

por tanto $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$



Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1: \quad \frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+7}{-3}$$
$$\mathscr{L}_2: \quad \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{-4} = \frac{z+5}{3}$$

Averiguar si las rectas son paralelas y cuál es su intersección



Solución.

$$\mathscr{L}_1 = \{(4,3,-7) + t(3,5,-3)\} \qquad \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (3,5,-3)$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(2,0,-5) + r(-3,-4,3)\} \qquad \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (-3,-4,3)$$

$\bar{a} \nparallel \bar{b}$ entonces $\mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2$

Supongamos que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P$ entonces $P \in \mathscr{L}_1$ y $P \in \mathscr{L}_2$.

Si $P \in \mathscr{L}_1$ entonces $P = (4,3,-7) + t(3,5,-3)$ para algún $t \in \mathbb{R}$

Si $P \in \mathscr{L}_2$ entonces $P = (2,0,-5) + r(-3,-4,3)$ para algún $r \in \mathbb{R}$

Igualando

$$(4,3,-7) + t(3,5,-3) = (2,0,-5) + r(-3,-4,3)$$

luego

$$\left.\begin{aligned} 3t + 3r &= -2 \\ 5t + 4r &= -3 \\ -3t - 3r &= 2 \end{aligned}\right\} \quad AX = B$$

el problema se reduce a resolver un sistema de tres ecuaciones con 2 incógnitas. En efecto:

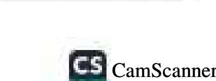
$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 = n$ entonces existe solución única

$$r = -\frac{1}{3} \text{ y } t = -2r - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

Reemplazando $r = -\frac{1}{3}$ entonces

$$P = (2, 0, -5) - \frac{1}{3}(-3, -4, 3) = (3, \frac{4}{3}, -6)$$



Si reemplazamos $t = -\frac{1}{3}$ se obtiene el mismo punto P.
Por tanto

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = (3, \frac{4}{3}, -6) = P$$

(Las rectas se intersecan)



Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 : \quad x - 2 = y - 1 = z - 4$$
$$\mathscr{L}_2 : \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-7}{-3}$$

Averiguar si las rectas son paralelas o si existe intersección.

Solución.

$$\mathscr{L}_1 = \{(2, 1, 4) + t(1, 1, 1)/t \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(3, -2, 7) + r(2, -1, -3)/r \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (1, 1, 1), \ \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (2, -1, -3)$$
$$\bar{a} \nparallel \bar{b} \Longrightarrow \mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2$$

Veamos si existe intersección
Suponiendo que $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P$ entonces $P \in \mathscr{L}_1$ y $P \in \mathscr{L}_2$
Si $P \in \mathscr{L}_1$ entonces $P = (2, 1, 4) + t(1, 1, 1)$ para algún $t \in \mathbb{R}$
Si $P \in \mathscr{L}_2$ entonces $P = (3, -2, 7) + r(2, -1, -3)$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Igualando

$$(2,1,4)+t(1,1,1)=(3,-2,7)+r(2,-1,-3)$$

luego

$$\left.\begin{aligned} t-2r&=1\\ t+r&=-3\\ t+3r&=3 \end{aligned}\right\} AX=B$$



Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -4/3\\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)=(E_A|E_B)$$

$r(A)=2, r(A|B)=3$

$r(A)\neq r(A|B)$ entonces el SEL es inconsistente, entonces no existe t y r que satisfacen el SEL.

Por lo tanto $\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_2=\emptyset$, es decir las rectas se cruzan.

Definición [illegible]

El ángulo entre las rectas $\mathscr{L}_1=\{P_0+t\bar{a}\}$ y $\mathscr{L}_2=\{Q_0+s\bar{b}\}$ es el ángulo entre los vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$, se denota por $m\angle(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)$.

Nota

1) Si $m\angle(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)=\theta$ entonces $0\leq\theta\leq\pi$.

2) La intersección de dos rectas determina dos ángulos adyacentes suplementarios.

3) Se determinará el ángulo entre dos rectas aún en el caso de que estas no se intersecan, es decir se cruzan.

Ejemplo 4.35

En el ejemplo anterior

$$\mathscr{L}_1 \parallel \vec{a} = (1,1,1)$$
$$\mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (2,-1,-3)$$



el ángulo entre las rectas está dado por

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\cdot\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(2,-1,-3)}{\sqrt{14}}$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{14}} < 0$$

entonces θ es obtuso y

$$m\angle(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) = \theta = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{14}}\right)$$

Ejemplo 4.36

Si $\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (3,1,-1)$ y $\mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (-1,8,2)$ entonces

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{11}\sqrt{69}} > 0$$

entonces θ es agudo y

$$m\angle(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) = \theta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{11}\sqrt{69}}\right)$$

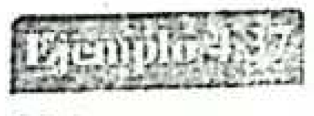
4.2.1.2 Rectas ortogonales

Definición 4.29

Dos rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son **ortogonales**, se denota por $\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$ si sus respectivos vectores direccionales son ortogonales.

Es decir, si $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_0 + r\bar{b}\}$

$$\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2 \Longleftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}.$$



Si

$$\mathscr{L}_1 : \quad x - 1 = y + 2, \; z = 3$$



$$\mathscr{L}_2 : \quad \frac{x}{3} = y - 4 = \frac{z+3}{-1}$$

hallar la ecuación vectorial de la recta ortogonal a las rectas dadas y que pasa por el origen de coordenadas O.

Solución.
En efecto,

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,-2,3) + t(1,1,0)\} \qquad \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (1,1,0)$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(0,4,-3) + r(3,1,-1)\} \qquad \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (3,1,-1)$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L} \parallel \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= i(-1) - j(-1) + k(-2) \\ &= (-1, 1, -2) \end{aligned}$$

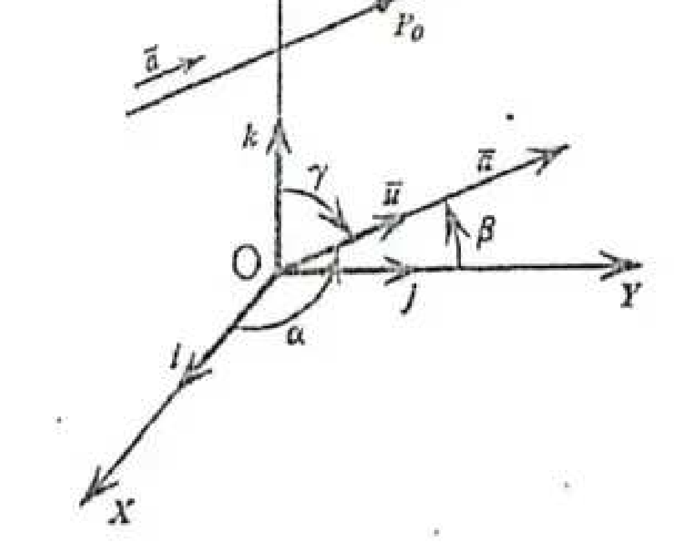
$$\mathscr{L} = \{(0,0,0) + t(1,-1,2)\}$$

Por tanto, $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L} \perp \mathscr{L}_2$

4.2.1.3 Cosenos directores de una recta

Sea $\mathscr{L} = \{P_0 + t\bar{a} / t \in \mathbb{R}\}$ la ecuación de una recta con vector direccional $\bar{a} \neq \bar{0}$ entonces $\mathscr{L} \parallel \bar{a} = (l, m, n)$.









En un sistema de coordenadas tridimensional tomemos las vectores unitarios $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$ en la dirección positiva de los ejes coordenados X, Y y Z respectivamente y $\bar{u} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ un vector unitario en la dirección y sentido de $\bar{a}$.

Sea α el ángulo entre i y $\bar{u}$, β el ángulo entre j y $\bar{u}$ y γ el ángulo k y $\bar{u}$

Definición 4.30

Los números l, m y n se llaman **números directores** de la recta $\mathscr{L}$. Los ángulos α, β y γ se llaman **ángulos directores** de la recta $\mathscr{L}$ y $\cos\alpha, \cos\beta$ y $\cos\gamma$ se llaman **cosenos directores** de la recta $\mathscr{L}$.

Tenemos que

$$i \cdot \bar{u} = |i||\bar{u}|\cos\alpha \Longrightarrow i \cdot \bar{u} = \cos\alpha$$

de modo similar obtenemos que

$$j \cdot \bar{u} = \cos\beta, \qquad k \cdot \bar{u} = \cos\gamma$$

entonces

$$\cos\alpha = (1, 0, 0) \cdot \frac{(l, m, n)}{|\bar{a}|} = \frac{l}{|\bar{a}|}$$
$$\cos\beta = (0, 1, 0) \cdot \frac{(l, m, n)}{|\bar{a}|} = \frac{m}{|\bar{a}|}$$
$$\cos\gamma = (0, 0, 1) \cdot \frac{(l, m, n)}{|\bar{a}|} = \frac{n}{|\bar{a}|}$$

$$\bar{u} = \frac{(l, m, n)}{|\bar{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

es un vector unitario paralelo a $\mathscr{L}$ donde

$$|\bar{u}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

Este análisis nos permite dar la siguiente definición.



Definición [illegible]

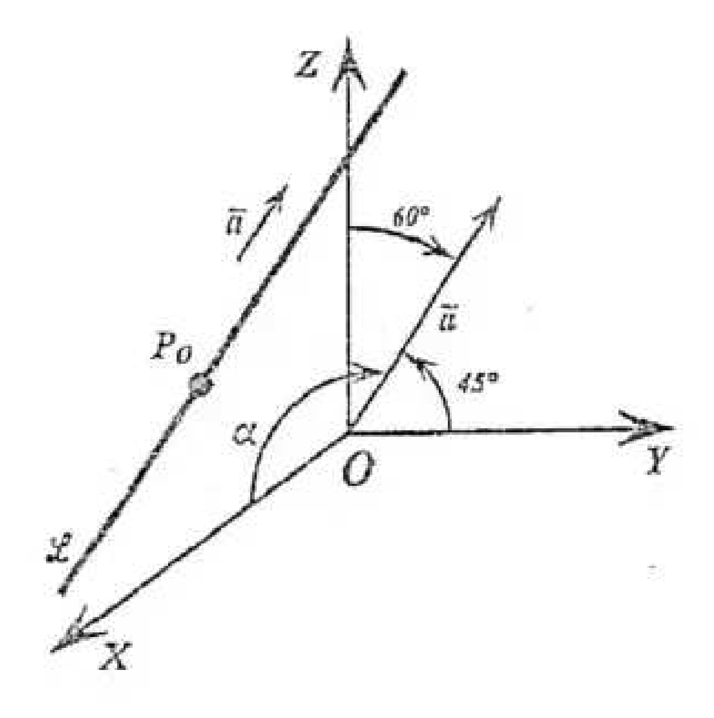
Si $\mathscr{L}$ es una recta con cosenos directores $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\gamma$ entonces

$$\mathscr{L} \parallel (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \text{ donde } \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$$

Ejemplo 4.38

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pase por el punto $(3, -6, 5)$ con ángulos directores $\beta = 45°$ y $\gamma = 60°$

Solución.
En efecto,



$P_0 = (3, -6, 5)$

$$\mathscr{L} \parallel \bar{a} \parallel \bar{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\cos\alpha, \cos 45°, \cos 60°)$$

$$|\bar{u}| = \cos^2\alpha + \cos^2 45° + \cos^2 60° = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \cos^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

entonces $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$

$$\bar{u} = (\pm\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel (\pm 1, \sqrt{2}, 1)$$





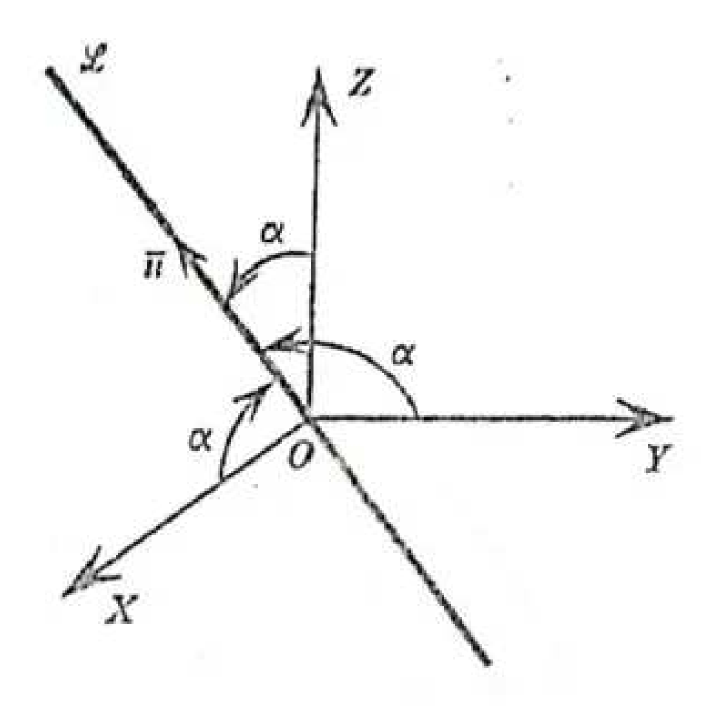
Son dos rectas que satisfacen las condiciones exigidas

$$\mathscr{L}_1 = \{(3, -6, 5) + t(1, \sqrt{2}, 1)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(3, -6, 5) + r(-1, \sqrt{2}, 1)\}.$$

Ejemplo 4.39

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el origen de coordenadas y forma el mismo ángulo con los ejes coordenados X, Y, Z.

Solución.



$$\mathscr{L} \parallel \bar{u} = (\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\alpha) = \cos\alpha(1, 1, 1)$$

$$\mathscr{L} = \{(0, 0, 0) + t(1, 1, 1)\}$$

Ejemplo 4.40

Determinar los ángulos entre la recta $\mathscr{L} = \{P_0 + t(1,1,1)\}$ y los ejes coordenados X, Y, Z

$$\mathscr{L} \parallel \bar{a} \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \bar{u} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos\alpha = i \cdot \bar{u} = (1,0,0) \cdot \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\cos\beta = j \cdot \bar{u} = (0,1,0) \cdot \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = k \cdot \bar{u} = (0,0,1) \cdot \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Nota

Sean $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}\}$ con ángulos directores α_1, β_1 y γ_1 y $\mathscr{L}_2 = \{Q_0 + r\bar{b}\}$ con ángulos directores α_2, β_2 y γ_2.
Si θ es el ángulo entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$, entonces θ es el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} \cdot \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} = (\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1) \cdot (\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$$

luego

$$\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$



Determinar los ángulos directores de la recta

$$\mathscr{L} : \frac{x-1}{-1} = y = \frac{z-1}{-1}$$

Solución.
En efecto,

$$\mathscr{L} = \{(1,0,1) + t(-1,1,-1)\}$$

$$\mathscr{L} \parallel \bar{a} = (-1,1,-1) \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \bar{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos\alpha = i\cdot\bar{u} = (1,0,0)\cdot\bar{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos\beta = j\cdot\bar{u} = (0,1,0)\cdot\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos\gamma = i\cdot\bar{u} = (0,0,1)\cdot\bar{u} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \gamma = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ejemplo 4.42

Determinar el ángulo entre las rectas

$$\mathscr{L}_1: \quad x = y = z \quad \text{y} \quad \mathscr{L}_2: \quad \frac{x-1}{-2} = y = \frac{z+3}{2}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(0,0,0) + t(1,1,1)\} \Longrightarrow \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (1,1,1)$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(1,0,-3) + r(-2,1,2)\} \Longrightarrow \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (-2,1,2)$$

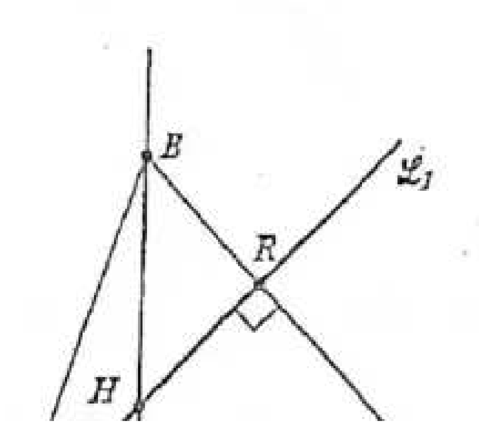
$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

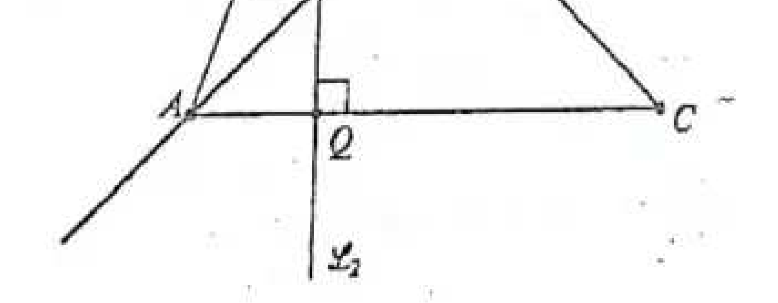
$$\theta = \arccos\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ejercicio 4.36

Sea el triángulo ABC con vértices $A = (1,2,-1)$, $B = (-1,2,1)$, $C = (2,1,3)$. Hallar el ortocentro H de dicho triángulo.

Solución.





El ortocentro del triángulo es el punto de intersección de las alturas del triángulo. Bastará calcular la intersección de dos rectas que contienen a dos alturas del trián-



gulo.

$$\overrightarrow{AC} = (1,-1,4)$$
$$\overrightarrow{CB} = (-3,1,-2)$$
$$\overrightarrow{AB} = (-2,0,2)$$

$\triangle AQB$

$$\overrightarrow{AQ} = \text{proy}_{\overrightarrow{AC}}\, \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\overrightarrow{AC} = \frac{6}{18}(1,-1,4) = \frac{1}{3}(1,-1,4)$$
$$\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AQ} = (-2,0,2) - \frac{1}{3}(1,-1,4) = \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$\mathscr{L}_2 = \{B + t\overrightarrow{QB}\} = \{(-1,2,1) + t(-7,1,2)\}$$

$\triangle ARB$

$$\overrightarrow{RB} = \text{proy}_{\overrightarrow{CB}}\, \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|^2}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{14}(-3,1,-2) = \frac{1}{7}(-3,1,-2)$$
$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BR} = (-2,0,2) + \frac{1}{7}(3,-1,2) = \left(-\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{16}{7}\right)$$
$$\mathscr{L}_1 = \{A + k\overrightarrow{AR}\} = \{(1,2,-1) + k(-11,-1,16)\}$$

Entonces $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = H$. Es decir

$$(1,2,-1) + k(-11,-1,16) = (-1,2,1) + t(-7,1,2)$$

entonces $t = -\frac{1}{9}$, $k = \frac{1}{9}$

Reemplazando $k = \frac{1}{9}$ en $\mathscr{L}_1$

Reemplazando $k = \frac{}{9}$ en $\mathscr{L}_1$

$$H = (1,2,-1) + \frac{1}{9}(-11,-1,16) = (-\frac{2}{9}, \frac{17}{9}, \frac{7}{9})$$

Si reemplazamos $t = -\frac{1}{9}$ en $\mathscr{L}_2$

$$H = (-1,2,1) - \frac{1}{9}(-7,1,2) = (-\frac{2}{9}, \frac{17}{9}, \frac{7}{9})$$

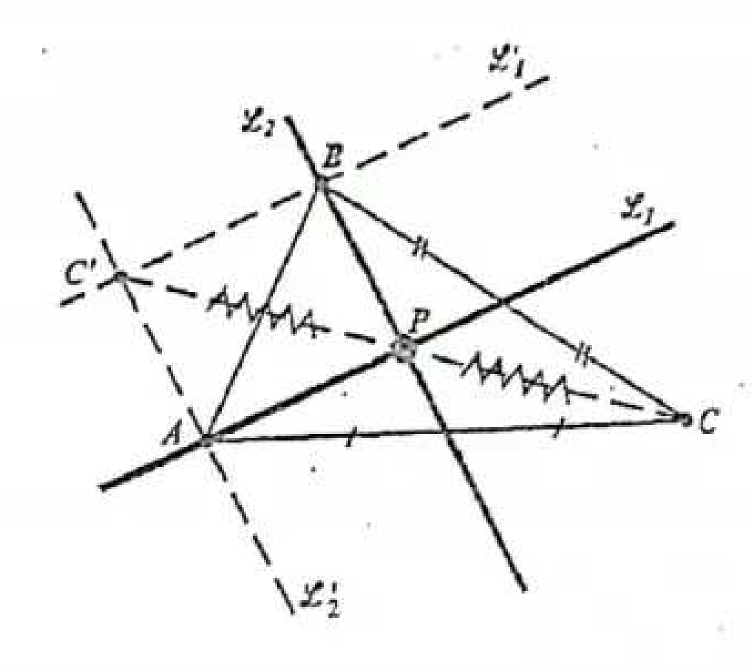
se obtiene el mismo resultado.



Ejercicio 4.37

Sea el $\triangle ABC$ con $C = (-4,1,1)$, $\mathscr{L}_1 = \{(-4,7,-1) + t(-5,9,-3)\}$ y $\mathscr{L}_2$: $\frac{x+9}{-5} = \frac{y+14}{-9} = \frac{z-6}{3}$ son medianas relativas a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Hallar los vértices del $\triangle ABC$

Solución.



$$\mathscr{L}_1 = \{(-4,7,-1) + t(-5,9,-3)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(-9,-14,6) + r(-5,-9,3)\}$$

$$\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (-5,9,-3)$$
$$\mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (-5,-9,3)$$

$$\mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2 \Longrightarrow \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P \text{ ó } \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$$

$$(-4,7,-1)+t(-5,9,-3)=(-9,-14,6)+r(-5,-9,3)$$

$r=-\frac{5}{3}$, $t=-\frac{2}{3}$

$$\mathscr{L}_1\cap\mathscr{L}_2=P=\left(-\frac{2}{3},1,1\right)$$

C' es el simétrico de C con respecto a P, entonces

$$P=\frac{C+C'}{2}\Longrightarrow C'=2P-C=\left(-\frac{4}{3},2,2\right)-(-4,1,1)=\left(\frac{8}{3},1,1\right)$$

$\triangle C'BC$

$$\mathscr{L}_1'\parallel\mathscr{L}_1\Longrightarrow\mathscr{L}_1'=\mathscr{L}_{C'B}=\{\left(\frac{8}{3},1,1\right)+k(-5,9,-3)\}$$

$\mathscr{L}_{C'B}\cap\mathscr{L}_2=B$

$$(\frac{8}{3},1,1)+k(-5,9,-3)=(-9,-14,6)+r(-5,-9,3)$$

$$r=-2,\ k=\frac{1}{3}\Longrightarrow B=(1,4,0)$$

$\triangle C'AC$

$$\mathscr{L}_2'=\mathscr{L}_{C'A}=\{(\frac{8}{3},1,1)+m(-5,-9,3)\}$$

$\mathscr{L}_{C'A}\cap\mathscr{L}_1=A$

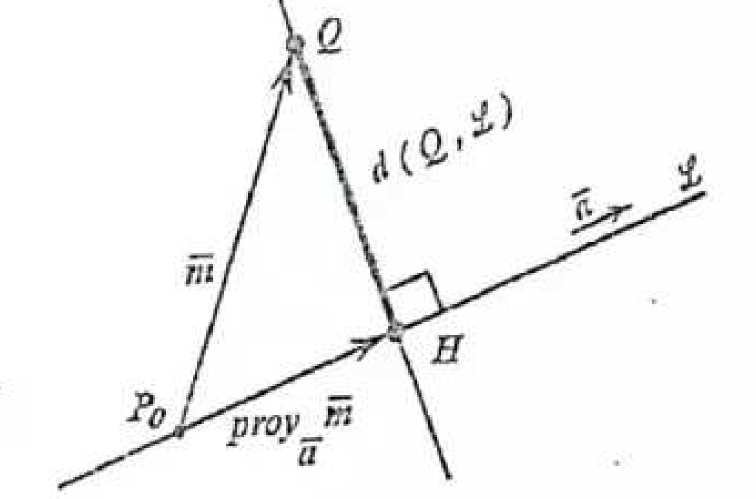
$$(\frac{8}{3},1,1)+m(-5,-9,3)=(-4,7,-1)+t(-5,9,-3)$$

$$t=-1,\ m=\frac{1}{3}\Longrightarrow A=(1,-2,2)$$

4.2.1.4 Distancia de un punto a una recta

Definición [illegible]

La distancia de un punto Q a una recta $\mathscr{L}$, denotada por $d(Q,\mathscr{L})$ es la longitud medida a lo largo de una recta que pasa por Q ortogonal a $\mathscr{L}$





Sea $Q \in \mathbb{R}^3$ y $\mathscr{L} = \{P_0 + t\bar{a}\}$ una recta con punto de paso P_0 y vector direccional $\bar{a} \neq \bar{0}$. En la figura, sea $\overrightarrow{P_0Q} = \bar{m}$

$$\overrightarrow{P_0H} = \text{proy}_{\bar{a}}\, \overrightarrow{P_0Q} = \text{proy}_{\bar{a}}\, \bar{m}$$

luego

$$\overrightarrow{HQ} = \bar{m} - \text{proy}_{\bar{a}}\, \bar{m} \text{ y } d(Q, L) = |\overrightarrow{HQ}|$$

Ejemplo 4.43

Si $\mathscr{L}: \quad x - 3 = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2}$ y $Q = (7, 3, -5)$. Calcular la distancia del punto Q a la recta $\mathscr{L}$.

Solución.

$$\mathscr{L} = \{(3, -2, 0) + t(1, -3, 2)\} \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \bar{a} = (1, -3, 2), \; P_0 = (3, -2, 0)$$

$$\bar{m} = \overrightarrow{P_0Q} = (4, 5, -5)$$

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\bar{a}}\, \bar{m} &= \frac{\bar{m} \cdot \bar{a}}{|\bar{a}|^2}\bar{a} \\ &= \frac{(4, 5, -5) \cdot (1, -3, 2)}{14}(1, -3, 2) \\ &= -\frac{3}{2}(1, -3, 2) \end{aligned}$$

$$\bar{m} - \text{proy}_{\bar{a}}\, \bar{m} = (4, 5, -5) + \frac{3}{2}(1, -3, 2)$$

$$= (\frac{11}{2}, \frac{1}{2}, -2) = \frac{1}{2}(11, 1, -4)$$

$$d(Q, \mathscr{L}) = |\bar{m} - \text{proy}_{\bar{a}}\, \bar{m}| = \frac{1}{2}\sqrt{138}$$



$$\text{Si } d(Q, \mathscr{L}) = 0 \Longrightarrow Q \in \mathscr{L}$$





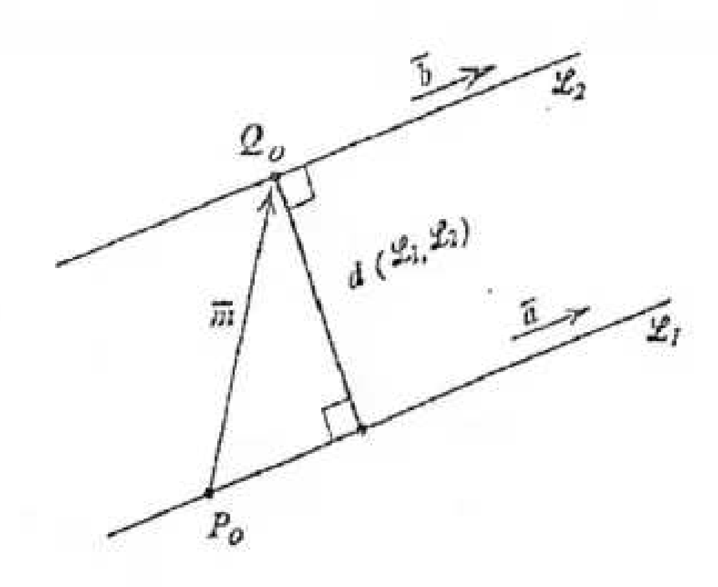
Si

$$\mathscr{L}_1 = \{(3, 0, 4) + t(1, -1, 2)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(2, -5, 6) + r(4, -4, 8)\}$$

Calcular la distancia entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ es decir $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$

Solución.

$\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (1, -1, 2)$, $\mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (4, -4, 8)$, como $\bar{a} \parallel \bar{b}$ entonces $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$.
$Q_0 = (2, -5, 6) \notin \mathscr{L}_1$ puesto que $\overrightarrow{Q_0P_0} \nparallel \bar{a}$ donde $P_0 = (3, 0, 4)$ entonces $\mathscr{L}_1 \parallel \mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$



En este caso, el problema se reduce a calcular $d(Q_0, \mathscr{L}_1)$

$$\bar{m} = \overrightarrow{P_0Q_0} = (-1, -5, 2)$$

$$\text{proy}_{\bar{a}}\, \bar{m} = \frac{4}{6}(1, -1, 2)$$

$$\text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{m} = \frac{?}{3}(1,-1,2)$$

$$\bar{m} - \text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{m} = -\frac{1}{3}(1,11,2)$$

$$d(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) = |\bar{m} - \text{proy}_{\bar{a}}\,\bar{m}| = \frac{1}{3}\sqrt{126}$$

Nota

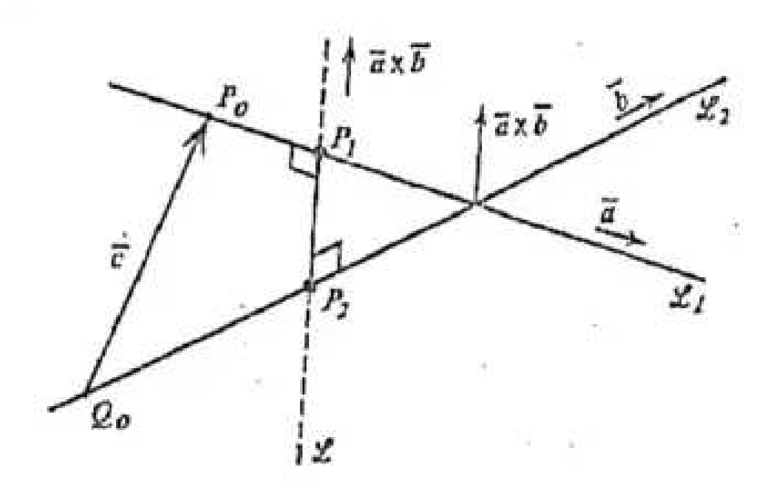
Si $d(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2) = 0 \Longrightarrow \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$



4.2.1.5 Distancia mínima entre dos rectas

Definición 4.36

La distancia mínima entre dos rectas no paralelas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ denotada por $d(\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2)$, es la longitud medida a lo largo de la recta que interseca ortogonalmente a ambas rectas



Sean $\mathscr{L}_1 = \{P_0 + t\bar{a}\}$ y $\mathscr{L}_2 = \{Q_0 + r\bar{b}\}$ dos rectas no paralelas entonces $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

En la figura, $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \emptyset$, es decir las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ se cruzan. La recta $\mathscr{L}$ interseca ortogonalmente a $\mathscr{L}_1$ y a $\mathscr{L}_2$ en los puntos P_1 y P_2 respectivamente, luego

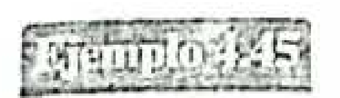
$$\mathscr{L} \parallel \bar{a}\times\bar{b} \text{ y } \bar{c} = \overrightarrow{Q_0P_0}$$

$$
\begin{aligned}
d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) &= d(P_1, P_2) \\
&= \left|\operatorname{proy}_{\mathscr{L}} \bar{c}\right| = \left|\operatorname{proy}_{\bar{a}\times\bar{b}}\, \bar{c}\right| = \left|\operatorname{comp}_{\bar{a}\times\bar{b}}\, \bar{c}\right| = \left|\frac{\bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\right|
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \left|\frac{[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\right|
$$





Si

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_1 &= \{(0,-3,4) + t(1,1,1)\} \\
\mathscr{L}_2 &= \{(3,1,1) + r(1,-1,3)\}
\end{aligned}
$$

Calcular la distancia mínima entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$

Solución.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_1 &\parallel \bar{a} = (1,1,1),\, P_0 = (0,-3,4) \\
\mathscr{L}_2 &\parallel \bar{b} = (1,-1,3),\, Q_0 = (3,1,1)
\end{aligned}
$$

$\mathscr{L}_1 \nparallel \mathscr{L}_2$ puesto que $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.
$\bar{c} = \overrightarrow{Q_0P_0} = (-3,-4,3)$

$$
[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -10
$$

y

$$
\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4,-2,-2)
$$

$$
d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \left|\frac{[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\right| = \left|\frac{-10}{2\sqrt{6}}\right| = \frac{5}{6}\sqrt{6}
$$

Nota

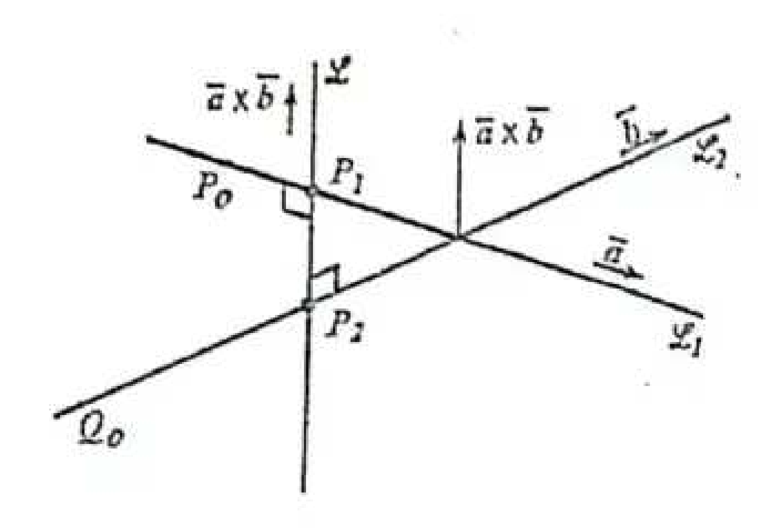
Si $d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = 0$ entonces $\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = \{P\}$ un punto, es decir las rectas se intersecan.

Ejemplo 4.46

Calcular la recta que contiene a la distancia mínima entre las rectas del Ejemplo 4.45



Solución.



$$\mathscr{L}_1 = \{(0,-3,4) + t(1,1,1)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(3,1,1) + r(1,-1,3)\}$$

$$\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (1,1,1), P_0 = (0,-3,4)$$
$$\mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (1,-1,3), Q_0 = (3,1,1)$$
$$\bar{a} \times \bar{b} = (4,-2,-2) \parallel (2,-1,-1)$$

Para hallar la ecuación de la recta $\mathscr{L}$ que contiene a la distancia mínima basta calcular un punto de paso que puede ser P_1 o P_2 (extremos de la distancia mínima entre las rectas dadas).

En efecto,

$$\text{Si } P_1 \in \mathscr{L}_1 \Longrightarrow P_1 = (0,-3,4) + t(1,1,1) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}$$
$$\text{Si } P_2 \in \mathscr{L}_2 \Longrightarrow P_2 = (3,1,1) + r(1,-1,3) \text{ para algún } r \in \mathbb{R}$$

Si $P_2 \in \mathscr{L}_2 \Longrightarrow P_2 = (3,1,1) + r(1,-1,3)$ para algún $r \in \mathbb{R}$

$$P_2 - P_1 = (r - t + 3, -r - t + 4, 3r - t - 3)$$

$$(P_2 - P_1) \parallel \bar{a} \times \bar{b} \Longrightarrow (P_2 - P_1) \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{0}$$

Luego

$$(P_2 - P_1) \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r - t + 3 & -r - t + 4 & 3r - t - 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$



$$= (4r - 7, 7r - 3t - 3, r + 3t - 11)$$
$$= (0, 0, 0)$$

$t = \frac{37}{12}$, $r = \frac{7}{4}$

$$P_2 = (3, 1, 1) + \frac{7}{4}(1, -1, 3) = (\frac{19}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{25}{4})$$

basta encontrar un punto de paso.

Entonces

$$\mathscr{L} = \{(\frac{19}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{25}{4}) + k(2, -1, -1); k \in \mathbb{R}\}$$

A modo de comprobación

$$P_1 = (0, -3, 4) + \frac{37}{12}(1, 1, 1)$$
$$= \left(\frac{37}{12}, \frac{1}{12}, \frac{85}{12}\right)$$

$$P_2 - P_1 = \left(\frac{19}{4} - \frac{37}{12}, -\frac{3}{4} - \frac{1}{12}, \frac{25}{4} - \frac{85}{12}\right)$$
$$= \left(\frac{20}{12}, -\frac{10}{12}, -\frac{10}{12}\right) \parallel (2, -1, -1) = \bar{a} \times \bar{b}$$

4.2.1.6 Independencia lineal de vectores

Este concepto es tratado con amplitud en el Capítulo 6. Sin embargo, su aplicación en esta parte es útil, por lo que es necesario tomarlo en cuenta.

Definición 4.5

Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ es un conjunto de vectores de un espacio vectorial V, se dice que $\bar{v} \in V$ es una combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$, si existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tales que $\bar{v}$ pueda expresarse así

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k$$





Ejemplo 4.47

Sea $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ un conjunto de vectores de V_3 donde $\bar{v}_1 = (1,1,3)$, $\bar{v}_2 = (4,2,1)$, entonces $\bar{v} = (-7,-3,1)$ es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ puesto que $\bar{v}$ se puede expresar

$$\bar{v} = (-7,-3,1) = (1,1,3) - 2(4,2,1) = \bar{v}_1 - 2\bar{v}_2$$

Ejemplo 4.48

Determinar si el vector $\bar{v} = (1,2,0)$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1 = (1,1,-1)$, $\bar{v}_2 = (3,2,1)$, $\bar{v}_3 = (-1,0,2)$

Solución.

Debemos encontrar escalares a_1, a_2, a_3 tales que:

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3,$$

es decir

$$(1,2,0) = a_1(1,1,-1) + a_2(3,2,1) + a_3(-1,0,2)$$

El problema se reduce a resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (puede tener solución única, infinitas soluciones o inconsistencia)

$$AX = B \begin{cases} a_1 + 3a_2 - a_3 = 1 \\ a_1 \qquad + 2a_2 = 2 \\ -a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$ solución única

$$a_3 = 1,\ a_2 = 0,\ a_1 = 2$$

entonces

$$\bar{v} = 2\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \bar{v}_3$$

Luego $\bar{v}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$

Ejemplo 4.49

Determinar si $\bar{v} = (3, 1, -8)$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1 = (1, 2, -1), \bar{v}_2 = (2, 0, -6), \bar{v}_3 = (-1, 1, 4)$

Solución.

Deben existir escalares $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3$$

$$(3, 1, -8) = a_1(1, 2, -1) + a_2(2, 0, -6) + a_3(-1, 1, 4)$$

$$AX = B \begin{cases} 3 = a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 1 = 2a_1 + a_3 \\ -8 = -a_1 - 6a_2 + 4a_3 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -6 & 4 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

entonces $r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \left\{ \left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, \frac{3}{4}t + \frac{5}{4}, t \right) \right\} \quad t \in \mathbb{R}$$

Existen infinitos valores de a_1, a_2, a_3 que dependen del parámetro t.

En particular, si $t = 4$ entonces

$$a_1 = -\frac{3}{2}, \qquad a_2 = \frac{17}{4}, \qquad a_3 = 4$$

y

$$\bar{v} = -\frac{3}{2}\bar{v}_1 + \frac{17}{4}\bar{v}_2 + 4\bar{v}_3$$

Luego $\bar{v}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$

Ejemplo 4.50

Determinar si $\bar{v} = (-3, 0, 6)$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1 = (1, 2, -1)$ y $\bar{v}_2 = (2, 4, 1)$



Solución.

Deben existir escalares a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2$$
$$(-3, 0, 6) = a_1(1, 2, -1) + a_2(2, 4, 1)$$

Entonces

$$AX = B \begin{cases} -3 = a_1 + 2a_2 \\ 0 = 2a_1 + 4a_2 \\ 6 = -a_1 + a_2 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2, r(A|B) = 3$ entonces es un sistema inconsistente, es decir no existen a_1 y $a_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2.$$

Es decir, $\bar{v}$ no es combinación lineal de $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$

Dentro de la teoría del álgebra lineal y de las matemáticas en general, las nociones de independencia y dependencia lineal, juegan un papel muy importante, puesto que ahora interesa saber generar el espacio vectorial mediante un conjunto de vectores.

Definición 4.35

Un conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ de k vectores en V_n se dice que es linealmente independiente si en la combinación lineal

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

todos los escalares son iguales a cero, es decir $r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$



Ejemplo 4.57

Averiguar si el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de V_4 es linealmente independiente (LI), donde

$$\bar{v}_1 = (1, -2, 4, 1), \qquad \bar{v}_2 = (2, 1, 0, -3), \qquad \bar{v}_3 = (3, -6, 1, 1)$$

Solución.

Debemos demostrar que en la combinación lineal

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

todos los escalares $r_1 = r_2 = r_3 = 0$. Entonces

$$r_1(1, -2, 4, 1) + r_2(2, 1, 0, -3) + r_3(3, -6, 1, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 + 2r_2 + 3r_3 &= 0 \\ -2r_1 + r_2 - 6r_3 &= 0 \\ 4r_1 + r_3 &= 0 \\ r_1 - 3r_2 + r_3 &= 0 \end{aligned}\right\} AX = 0$$

es un sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(a) = 3 = n$ entonces solución única

$$r_3 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_1 = -2r_2 - 3r_3 = 0$$

Por tanto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es L.I.

Ejemplo 4.52

Averiguar si el conjunto de vectores de V_3, $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es linealmente independiente, si $\bar{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\bar{v}_2 = (3, 1, 1)$ y $\bar{v}_3 = (-1, 4, 1)$





Solución.

Debemos demostrar que en la combinación lineal

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

los escalares $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

En efecto

$$r_1(1, 2, 0) + r_2(3, 1, 1) + r_3(-1, 4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$AX = 0 \begin{cases} r_1 + 3r_2 - r_3 = 0 \\ 2r_1 + r_2 + 4r_3 = 0 \\ r_2 + r_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 3 = n$ entonces solución única

$$r_3 = 0, \quad r_2 = -r_3 = 0, \quad r_1 = -2r_2 + r_3 = 0$$

Por tanto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es L.I.

Definición 4.36

Un conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ de k vectores en V_n se dice que es **linealmente dependiente**, si existen escalares $r_1, r_2, \ldots, r_k$ no todos igual a cero tal que

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r_k\bar{v}_k = \bar{0}.$$

Nota

"No todos los escalares igual a cero" significa que por lo menos uno de los escalares es diferente de cero.

Ejemplo [illegible]

Averiguar si el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de V_4 es linealmente dependiente (LD) donde

$$\bar{v}_1 = (1, 3, -1, 4), \quad \bar{v}_2 = (3, 8, -5, 7) \text{ y } \bar{v}_3 = (2, 9, 4, 23)$$

Solución.
Debemos demostrar que en la combinación

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

no todos los escalares son igual a cero.
En efecto

$$r_1(1, 3, -1, 4) + r_2(3, 8, -5, 7) + r_3(2, 9, 4, 23) = (0, 0, 0, 0)$$

se reduce al sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \begin{cases} r_1 + 3r_2 + 2r_3 = 0 \\ 3r_1 + 8r_2 + 9r_3 = 0 \\ -r_1 - 5r_2 + 4r_3 = 0 \\ 4r_1 + 7r_2 + 23r_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ -1 & -5 & 4 \\ 4 & 7 & 23 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria.

$$S = \{-11t, 3t, t\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Entonces existen infinitos valores de r_1, r_2 y r_3 que dependen de $t \in \mathbb{R}$. En particular, si $t = 1$ entonces

$$r_1 = -11, \qquad r_2 = 3, \qquad r_3 = 1$$

entonces

$$-11\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2 + \bar{v}_3 = \bar{0}$$

Por tanto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es L.D.



Nota

Si en el resultado del ejemplo anterior hacemos $t = 0$ entonces $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ (todos los escalares son iguales a cero y el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ sería L.I. y esto no es cierto, puesto que para otros valores de $t \neq 0$ existen escalares no iguales a cero, basta que exista un escalar diferente de cero para que el conjunto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ sea L.D.)

Ejemplo 4.54

Averiguar si el conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de V_3 es linealmente dependiente, si $\bar{v}_1 = (1, -1, 5), \bar{v}_2 = (2, -3, 4), \bar{v}_3 = (1, -2, 1)$

Solución.
Debemos demostrar que en la combinación lineal

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + r_3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

no todos los escalares son iguales a cero. En efecto

$$r_1(1, -1, 5) + r_2(2, -3, 4) + r_3(1, -2, -1) = (0, 0, 0)$$

Entonces se tiene el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$AX = 0 \begin{cases} r_1 + 2r_2 + r_3 = 0 \\ -r_1 - 3r_2 - 2r_3 = 0 \\ 5r_1 + 4r_2 - r_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = E_f$$

$$A = \begin{pmatrix} \cdots \\ -1 & -3 & -2 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{t, -t, t\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

En particular, si $t = 3$, entonces

$$r_1 = 3, \quad r_2 = -3, \quad r_3 = 3$$



y

$$3\bar{v}_1 - 3\bar{v}_2 + 3\bar{v}_3 = \bar{0}$$

por tanto $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es L.D.

Observación.

1) Todo vector no nulo de un espacio vectorial V es L.I. Es decir:

Si $\bar{a} \neq \bar{0}$ entonces $\{\bar{a}\}$ es L.I. puesto que

$$r\bar{a} = \bar{0} \iff r = 0$$

2) Si $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es un conjunto de vectores de V_n

$$\{\bar{a}, \bar{b}\} \text{ es L.I. } \iff \bar{a} \nparallel \bar{b}$$

En efecto

($\Rightarrow$) Si $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.I. $\Longrightarrow \bar{a} \nparallel \bar{b}$

Por el método del absurdo, supongamos que $\bar{a} \parallel \bar{b}$ entonces existe $r \in \mathbb{R}$ al que $\bar{a} = r\bar{b}$, $\bar{a} - r\bar{b} = \bar{0}$. El coeficiente de $\bar{a}$ es $1 \neq 0$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.D. lo que contradice la hipótesis.

($\Leftarrow$) Si $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.I.

En la combinación lineal

$$r\bar{a} + s\bar{b} = \bar{0} \tag{4.60}$$

debemos demostrar que $r = s = 0$.

Por hipótesis $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ entonces

$$\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp} = -\bar{a}^{\perp}\cdot\bar{b} \neq 0$$

En (4.60)

$$(r\bar{a}+s\bar{b})\cdot\bar{a}^{\perp} = r(\bar{a}\cdot\bar{a}^{\perp}) + s(\bar{b}\cdot\bar{a}^{\perp}) = s(\bar{b}\cdot\bar{a}^{\perp}) = 0 \Longrightarrow s = 0$$
$$(r\bar{a}+s\bar{b})\cdot\bar{b}^{\perp} = r(\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}) + s(\bar{b}\cdot\bar{b}^{\perp}) = r(\bar{a}\cdot\bar{b}^{\perp}) = 0 \Longrightarrow r = 0$$

Por tanto, queda demostrado que $\{\bar{a},\bar{b}\}$ es L.I.



Este resultado nos conduce a la siguiente interpretación geométrica

Si dos vectores son paralelos entonces son L.D.

Si dos vectores no son paralelos entonces son L.I.

3) Cualquier conjunto de vectores $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{0},\ldots,\bar{v}_k\}$ de V_n que contenga al vector cero es L.D.

En la combinación lineal

$$r_1\bar{v}_1 + r_2\bar{v}_2 + \cdots + r\bar{0} + \cdots + r_k\bar{v}_k = \bar{0}$$

notamos que se cumple la identidad si

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0 \text{ y } r \neq 0$$

(no todos los escalares igual a cero) entonces $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\ldots,\bar{0},\ldots,\bar{v}_k\}$ es L.D.

4) Si a un conjunto de vectores L.D. de un espacio vectorial V le añadimos cualquier vector de V, el conjunto resultante sigue siendo $L.D.$

5) Si en un conjunto de vectores L.I. de un espacio vectorial V prescindimos de cualquier vector, el conjunto resultante sigue siendo L.I.

6) Si $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ es L.D. en un espacio vectorial V y $\{\bar{b},\bar{c}\}$ es L.I. entonces existen $m,n\in\mathbb{R}$ tales que $\bar{a} = m\bar{b}+n\bar{c}$

En la combinación lineal

$$r\bar{a}+s\bar{b}+t\bar{c} = \bar{0} \qquad (4.61)$$

Supongamos que $r = 0$ entonces

$$s\bar{b} + t\bar{c} = 0$$

pero $\{\bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I. entonces $s = t = 0$ lo que contradice la hipótesis, luego $r \neq 0$ puesto que $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ es L.D.

En (4.61)

$$\bar{a} = -\frac{s}{r}\bar{b} - \frac{t}{r}\bar{c} = m\bar{b} + n\bar{c}$$

7) El conjunto $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ de V_3 es L.D. si y solo si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 0$ en términos geométricos significa que los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son coplanares. Por otro lado, si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$ implica que los tres vectores son L.I. y por tanto no son coplanares.







Demostrar que los vectores

$$\bar{u} = \bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c},$$
$$\bar{v} = \bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c},$$
$$\bar{w} = \bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}$$

de V_3 son L.D.

Solución.

Método 1(Usando la definición de dependencia lineal)

$\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es L.D. si y solo si existen escalares no todos igual a cero tales que

$$r\bar{u} + s\bar{v} + t\bar{w} = \bar{0}$$

$$r(\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) + s(\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}) + t(\bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}) = \bar{0}$$

$$A\bar{X} = 0 \begin{cases} r + s + t = 0 \\ 2r + 3s + t = 0 \\ r - 2s + 4t = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$r(A) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{-2k, k, k\} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ es L.D

Método 2

Usando el triple producto escalar, solo si los vectores pertenecen a V_3, como en este caso

$$\text{Si } [\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}] = 0 \Longrightarrow \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} \text{ es L.D.}$$



$$\begin{aligned}
[\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}] &= \bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) \\
&= (\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + 3\bar{b} - 2\bar{c}) \times (\bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}) \\
&= (\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times 4\bar{c} + 3\bar{b} \times \bar{a} + 12\bar{b} \times \bar{c} - 2\bar{c} \times \bar{a} \\
&\qquad - 2\bar{c} \times \bar{b}) \\
&= (\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) \cdot (-2\bar{a} \times \bar{b} + 6\bar{a} \times \bar{c} + 14\bar{b} \times \bar{c}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

[illegible]

Para qué valores de λ, el conjunto de vectores $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ de V_3 es L.D. si

1) $\bar{a} = (\lambda, 2, 2)$, $\bar{b} = (2, \lambda, 2)$, $\bar{c} = (2, 2, \lambda)$

2) $\bar{a} = (1 - \lambda, 2, 1)$, $\bar{b} = (1, -\lambda, -1)$, $\bar{c} = (1, -2, \lambda - 3)$

Solución.

En efecto

1)

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & 2 \\ 2 & \lambda & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 4)(\lambda - 2)^2 = 0$$

luego $\lambda = -4$ y $\lambda = 2$

2)

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda) = 0$$

luego $\lambda = 2$ y $\lambda = 0$



Ejercicio 4.40

$\{a, b, c\}$ es un conjunto L.I. de vectores en V_3. Si

$$\bar{x} = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}, \quad \bar{y} = \frac{\bar{a} \times \bar{c}}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}, \quad \bar{x} = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

Demostrar que $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ es L.I.

Solución.

En efecto, si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I. entonces $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$

$$\begin{aligned} [\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] &= \bar{x} \cdot (\bar{y} \times \bar{z}) \\ &= \frac{1}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^3}(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot ((\bar{a} \times \bar{c}) \times (\bar{a} \times \bar{b})) \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{c}) \times (\bar{a} \times \bar{b}) &= ((\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b})\bar{a} - ((\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{a})\bar{b} \\ &= -[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{a} \end{aligned}$$

En (4.62)

$$\begin{aligned} [\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] &= \frac{1}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^3}(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot (-[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{a}) \\ &= \frac{1}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^3}(-[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}])(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} \\ &= -\frac{1}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]} \neq 0 \end{aligned}$$

$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

Por tanto $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ es L.I.

Ejercicio 4.31

Para qué valores de t, el conjunto $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I. donde $\bar{a} = (t+3, 1, 2)$, $\bar{b} = (t, t-1, 1)$, $\bar{c} = (3t+3, t, t+3)$.

Solución.
En efecto,

$$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \text{ es L.I.} \iff [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$$

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} t+3 & 1 & 2 \\ t & t-1 & 1 \\ 3t-3 & t & t+3 \end{vmatrix} = t^2(t-1) \iff t \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

$$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \text{ es L.I.} \iff t \neq 0, t \neq 1$$

[illegible]

Se dice que un conjunto de vectores $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ genera un espacio vectorial V, si todo vector en el espacio V se puede expresar como una combinación lineal de estos vectores.

Es decir, un conjunto generador de vectores define, de alguna forma, el espacio vectorial puesto que cada vector del espacio se puede obtener a partir de este conjunto.

[illegible]

Demuestre que los vectores $\bar{v}_1 = (1, 1, 3)$, $\bar{v}_2 = (1, 2, 1)$, $\bar{v}_3 = (2, -1, 13)$ generan V_3

Solución.
Sea $\bar{v} = (x, y, z)$ un elemento cualquiera de V_3, entonces

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3$$

$$(x, y, z) = a_1(1, 1, 3) + a_2(1, 2, 1) + a_3(2, -1, 13)$$

$(x, y, z) = a_1(1, 1, 3) + a_2(1, 2, 1) + a_3(2, -1, 13)$

$$AX = B \begin{cases} x = a_1 + a_2 + 2a_3 \\ y = a_1 + 2a_2 - a_3 \\ z = 3a_1 + a_2 + 13a_3 \end{cases}$$



$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 2 & -1 & y \\ 3 & 1 & 13 & z \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & y - x \\ 0 & 0 & 1 & -5x + 2y + z \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 = n$, entonces existe solución única

$$a_3 = -5x + 2y + z$$
$$a_2 = 3a_3 + y - x = -16x + 7y + 3z$$
$$a_1 = -a_2 - 2a_3 + x = 27x - 11y - 5z$$

Por tanto

$$(x, y, z) = (27x - 11y - 5z)(1, 1, 3) + (-16x + 7y + 3z)(1, 2, 1) + (-5x + 2y + z)(2, -1, 13) \quad (4.63)$$

Nota

Este resultado permite expresar de inmediato un vector en V_3 como combinación lineal de $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ y $\bar{v}_3$.

Veamos: Si se quiere saber como se expresa $(1, 7, -3)$ en términos de estos vectores. En (4.63) sustituimos $x = 1, y = 7, z = -3$

$$(1, 7, -3) = -35(1, 1, 3) + 24(1, 2, 1) + 6(2, -1, 13)$$

Ejemplo 4.56

Demostrar que los vectores $i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1)$ de V_3 generan el espacio V_3.

Solución.

Sea (x, y, z) un elemento cualquiera de V_3 entonces

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) \quad .$$

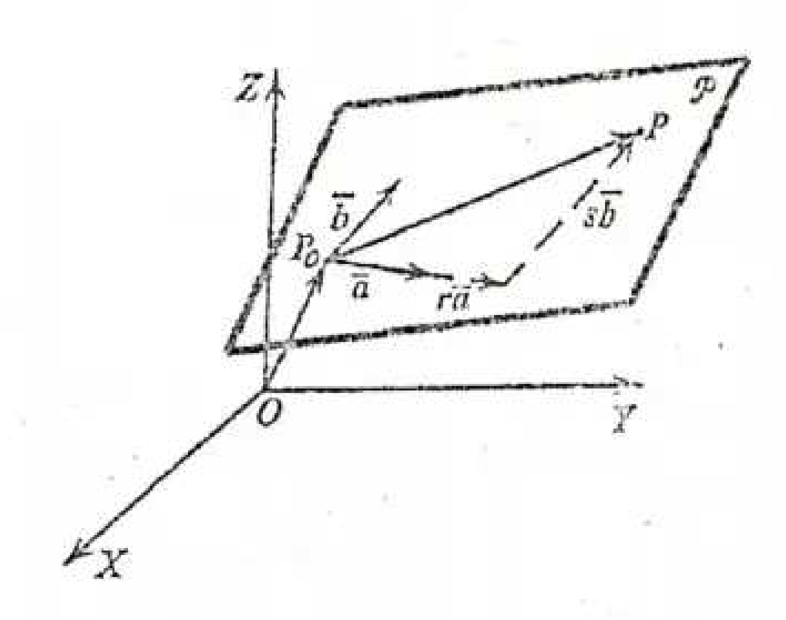


4.2.2 El plano

Definición:

Dado un punto $P_0 \in \mathbb{R}^3$ y dos vectores no nulos y no paralelos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ en V_3 se llama **plano** que pasa por P_0 determinado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ al siguiente conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b},\ r, s \in \mathbb{R},\ \bar{a} \nparallel \bar{b}\}$$



En la figura

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$$

$$P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b},\ r, s \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{P} = \{P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b},\ r, s \in \mathbb{R}\}$$

se llama ecuación vectorial del plano $\mathscr{P}$ con punto de paso P_0 y vectores direccionales $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

Nota

1) Si $P_0 \in \mathscr{P}$, equivale a decir que el plano $\mathscr{P}$ pasa por P_0.

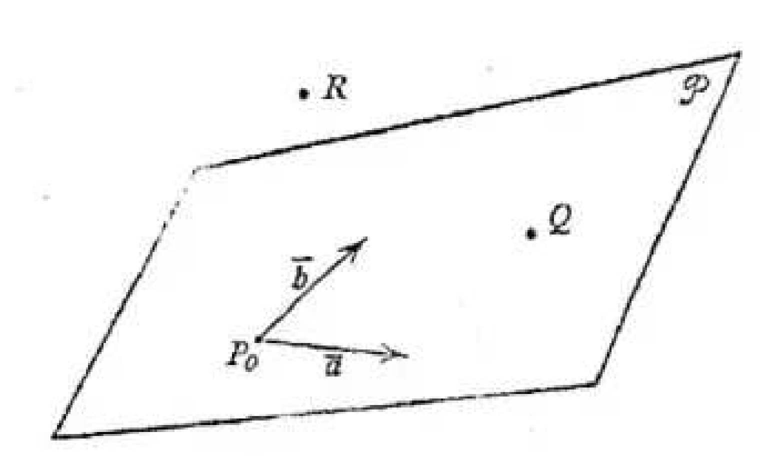
2) Si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ ($\bar{a} \nparallel \bar{b}$) determinan el plano $\mathscr{P}$ equivale a decir que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son vectores direccionales de $\mathscr{P}$.

Ejemplo 4.57

Hallar la ecuación vectorial del plano que pasa por el punto $(1, 0, -1)$ y está determinado por los vectores $\bar{a} = (1, 3, -2)$, $\bar{b} = (2, 1, 5)$

Solución.

$$\mathscr{P} = \{(1, 0, -1) + r(1, 3, -2) + s(2, 1, 5)/r, s \in \mathbb{R}\}$$



Enseguida averiguaremos si los puntos $Q = (1, -5, 8)$ y $R = (2, -2, 4)$ pertenecen al plano $\mathscr{P}$. En efecto, si $Q \in \mathscr{P}$ entonces

$$Q = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} \text{ para algún } r, s \in \mathbb{R}$$
$$(1, -5, 8) = (1, 0, -1) + r(1, 3, -2) + s(2, 1, 5)$$

$$AX = B \begin{cases} r + 2s = 0 \\ 3r + s = -5 \\ -2r + 5s = 9 \end{cases}$$

es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ -2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 = n$ entonces solución única

$$s = 1, \qquad r = -2s = -2$$

Por tanto $Q \in \mathscr{P}$

$$R \in \mathscr{P} \iff R = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} \text{ para algún } r, s \in \mathbb{R}$$

$$(2, -2, 4) = (1, 0, -1) + r(1, 3, -2) + s(2, 1, 5)$$

$$AX = B \begin{cases} r + 2s = 1 \\ 3r + s = -2 \\ -2r + 5s = 5 \end{cases}$$

entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

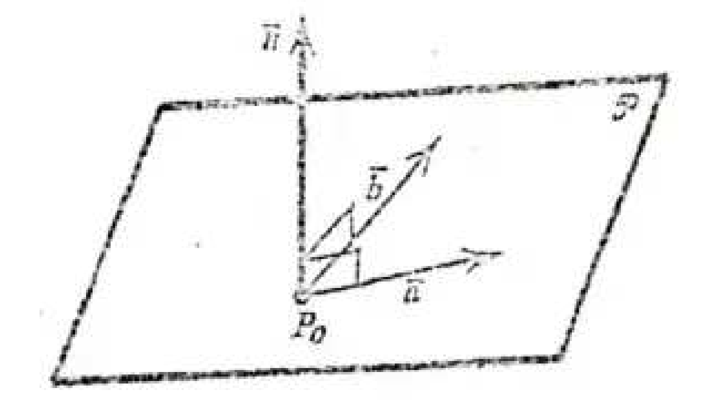
$r(A) \neq r(A|B)$ entonces el sistema de ecuaciones es inconsistente entonces no existe $r, s \in \mathbb{R}$ tal que

$$R = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} \Longrightarrow R \notin \mathscr{P}$$

Si

$$\mathscr{P} = \{P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} / r, s \in \mathbb{R}\}$$

es el plano que pasa por P_0 y determinado por los vectores no paralelos $\bar{a}$ y $\bar{b}$. Cualquier vector no nulo $\bar{n}$ ortogonal a ambos vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se llama vector normal al plano $\mathscr{P}$.





Nota

1) $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$ es un vector normal al plano $\mathscr{P}$.

2) Cualquier otro vector normal al plano $\mathscr{P}$ es paralelo a $\bar{a} \times \bar{b}$

Lema 4.2

Si $\bar{n}$ es un vector normal al plano

$$\mathscr{P} = \{P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} / r, s \in \mathbb{R}\}$$

y $P_1, P_2 \in \mathscr{P}$ entonces $\bar{n}$ es ortogonal a $P_2 - P_1$

Demostración.

$$\text{Si } P_1 \in \mathscr{P} \Longrightarrow P_1 = P_0 + r_1\bar{a} + s_1\bar{b} \text{ para algún } r_1, s_1 \in \mathbb{R}$$
$$\text{Si } P_2 \in \mathscr{P} \Longrightarrow P_2 = P_0 + r_2\bar{a} + s_2\bar{b} \text{ para algún } r_2, s_2 \in \mathbb{R}$$
$$P_2 - P_1 = (r_2 - r_1)\bar{a} + (s_2 - s_1)\bar{b}$$
$$\bar{n} \cdot (P_2 - P_1) = 0 \text{ puesto que } \bar{n} \perp \bar{a} \text{ y } \bar{n} \perp \bar{b}$$

◇



Lema 4.3

Si $\bar{n}$ es un vector normal al plano

$$\mathscr{P} = \{P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} / r, s \in \mathbb{R}\}$$

y $(P - P_0)$ es ortogonal a $\bar{n}$ entonces $P \in \mathscr{P}$.

Demostración. Si $\bar{n}$ es normal al plano $\mathscr{P}$ entonces $\bar{n} \parallel \bar{a} \times \bar{b}$ entonces existe $k \in \mathbb{R} / \bar{n} = k(\bar{a} \times \bar{b})$ y $k \neq 0$.
Si $P - P_0$ es ortogonal a $\bar{n}$ entonces

$$(P - P_0) \perp \bar{a} \times \bar{b}$$
$$(P - P_0) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = 0$$
$$[(P - P_0)\bar{a}\bar{b}] = 0$$

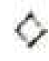


$$\{P - P_0, \bar{a}, \bar{b}\} \text{ es L.D.}$$

pero $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ es L.I., luego

$P - P_0 = m\bar{a} + t\bar{b}$ para algún $m, t \in \mathbb{R}$ (Observación 6 de la Sección 4.2.1.6)

$$P = P_0 + m\bar{a} + t\bar{b}$$

entonces $P \in \mathscr{P}$. 

[illegible]

El Lema 4.3 nos proporciona un método simple y útil para averiguar si un punto pertenece o no a un plano.

[illegible]

Usando el Lema 4.3, averiguamos si los puntos $Q = (1, -5, 8)$ y $R = (2, -2, 4)$ pertenecen al plano del Ejemplo 4.57.

Solución.
Veamos

$$\mathscr{P}: \qquad P_0 = (1, 0, -1) \qquad \bar{a} = (1, 3, -2) \qquad \bar{b} = (2, 1, 5)$$

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = i(17) - j(9) + k(-5)$$

entonces $\bar{n} = (17, -9, -5)$.

$$Q - P_0 = (0, -5, 9) \Longrightarrow \bar{n} \cdot (Q - P_0) = 0 \Longrightarrow Q \in \mathscr{P}$$
$$R - P_0 = (1, -2, 5) \Longrightarrow \bar{n} \cdot (R - P_0) = 17 + 18 - 25 \neq 0 \Longrightarrow R \notin \mathscr{P}$$

Nota

Si $\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{R}^3 / P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b},\ r, s \in \mathbb{R}\}$ es la ecuación vectorial de un plano $\mathscr{P}$ y $\bar{n}$ es un vector normal al plano $\mathscr{P}$ entonces

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = \bar{n} \cdot (r\bar{a} + s\bar{b}) = 0$$

Este resultado nos permite dar la siguiente definición

Definición 4.40

$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$ se llama **ecuación normal del plano** $\mathscr{P}$ con punto de paso P_0 y vector normal $\bar{n} \neq \bar{0}$.

Ejemplo 4.59

Encontrar la ecuación normal del plano con vector normal $\bar{n} = (1, 2, -5)$ y punto de paso $P_0 = (7, -1, 0)$

Solución.

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(1, 2, -5) \cdot (x - 7, y + 1, z) = 0$$

Teorema 4.10

Tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^3$, determinan un plano único.

Demostración. Sean P_0, P_1 y P_2 tres puntos no colineales entonces $P_1 - P_0$ y $P_2 - P_0$ son vectores no paralelos, entonces

$$\mathscr{P} = \{P_0 + r(P_1 - P_0) + s(P_2 - P_0),\ r, s \in \mathbb{R}\}$$

es el plano que pasa por P_0, P_1 y P_2 y $\bar{n} = (P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0)$ es una normal

al plano $\mathscr{P}$ y

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

Para demostrar la unicidad de $\mathscr{P}$ supongamos que el plano

$$\mathscr{P}' = \{P_0' + r(P_1 - P_0) + s(P_2 - P_0),\ r, s \in \mathbb{R}\}$$

es otro plano que pasa por P_0' con la misma normal $\bar{n}$ de $\mathscr{P}$ entonces

$$\mathscr{P}': \quad \bar{n} \cdot (P - P_0') = 0$$

es la ecuación normal de $\mathscr{P}'$.
Si $P_0 \in \mathscr{P}'$, entonces

$$\bar{n} \cdot (P_0 - P_0') = 0$$
$$\bar{n} \cdot P_0 = \bar{n} \cdot P_0'$$

de donde

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = \bar{n} \cdot (P_0 - P_0'); \quad \forall P \in \mathbb{R}^3$$

y entonces

$$\mathscr{P}' = \{P / \bar{n} \cdot (P - P_0') = 0\} = \{P / \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0\} = \mathscr{P}$$

Luego el plano $\mathscr{P}$ es único. ◇



Hallar la ecuación normal del plano que pase por los puntos

Hallar la ecuación normal del plano que pasa por los puntos

$$P_0 = (1, 2, -1), \qquad P_1 = (3, 4, 0) \text{ y } P_2 = (1, 3, 2)$$

Solución.

$$\vec{a} = P_1 - P_0 = (2, 2, 1), \quad \vec{b} = P_2 - P_0 = (0, 1, 3)$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = i(5) - j(6) + k(2) = (5, -6, 2)$$

$$\mathscr{P}: \quad \vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(5, -6, 2) \; (x - 1, y - 2, z + 1) = 0$$

Observación.

1) Si $\mathscr{P}: \quad \vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$ es la ecuación normal del plano $\mathscr{P}$ entonces

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$
$$\vec{n} \cdot P - \vec{n} \cdot P_0 = 0$$
$$\vec{n} \cdot P = \vec{n} \cdot P_0 = d \tag{4.64}$$

2) Si $\vec{n} = (a, b, c) \neq \bar{0}$ y $P = (x, y, z)$ entonces

$$\vec{n} \cdot P = (a, b, c) \cdot (x, y, z) = ax + by + cz = d \tag{4.65}$$

luego (4.64) es equivalente a (4.65)

En consecuencia, podemos dar la siguiente definición

Definición 4.41

$\mathscr{P}: \quad ax + by + cz = d$ se llama **ecuación cartesiana** o **ecuación general** del plano con vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$, donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$



Identificar las siguientes ecuaciones

1) $3x - 2y + z = -3$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (3, -2, 1) \qquad P_0 = (0, 0, -3)$$

puesto que

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$(3, -2, 1) \cdot (x, y, z + 3) = 0$$

$$3x - 2y + z + 3 = 0$$

2) $5x - 8y = 10$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (5, -8, 0) \qquad P_0 = (2, 0, 0)$$

puesto que

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$(5, -8, 0) \cdot (x - 2, y, z) = 0$$

$$5x - 8y - 10 = 0$$

3) $x + y + z = 0$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (1, 1, 1) \qquad P_0 = (0, 0, 0)$$

puesto que

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$(1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$$

$$x + y + z = 0$$

(plano que pasa por el origen O)

4) $z = 1$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (0, 0, 1) \qquad P_0 = (0, 0, 1)$$

puesto que

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(0,0,1) \cdot (x, y, z-1) = 0$$
$$z - 1 = 0$$

(plano paralelo al plano XY)

5) $y = 0$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (0,1,0), \qquad P_0 = (0,0,0)$$



puesto que

$$\bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(0,1,0) \cdot (x, y, z) = 0$$
$$y = 0$$

(plano XZ)

Nota

En 4. y 5.: P_0 puede tener la forma $(r, t, 1)$ y $P_0 = (r, 0, t)$ respectivamente, para todo $r, t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4.62

Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $(1,5,2)$, $(-1,9,-4)$ y $(7,-1,2)$

Solución.

$$P_0 = (1,5,2) \qquad \bar{a} = (-2,4,-6) \qquad \bar{b} = (6,-6,0)$$

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} \doteq \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i(-3) - j(3) + k(-1) = (-3,-3,-1)$$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(3,3,1) \cdot (x-1, y-5, z-2) = 0$$

entonces

$$\mathscr{P}: \quad 3x + 3y + z - 20 = 0$$



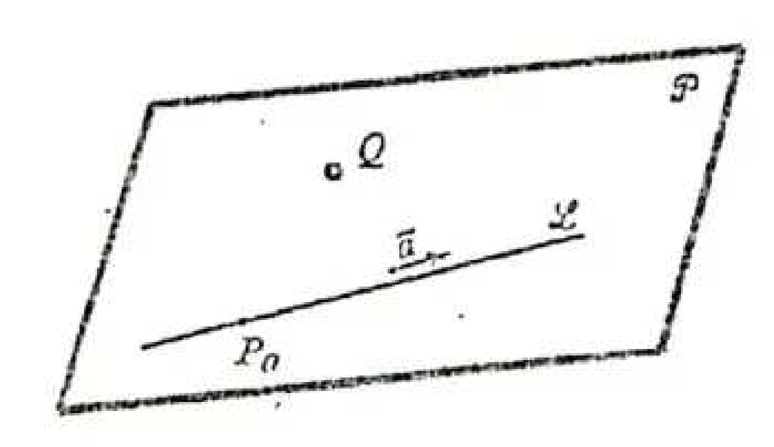
Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\mathscr{L}: \quad x = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{4}$$

y pasa por el punto $(5, 7, 2)$.



Solución.



$$\mathscr{L} = \{(0, -2, 3) + t(1, -1, 4)\}$$

$$P_0 = (0, -2, 3) \qquad \bar{a} = (1, -1, 4) \qquad Q = (5, 7, 2)$$

$$\bar{b} = Q - P_0 = (5, 9, -1)$$

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & -1 \end{vmatrix} = i(-35) - j(-21) + k(14)$$

$$\bar{n} = (5, -3, -2)$$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n}\cdot(P-P_0)=0$$

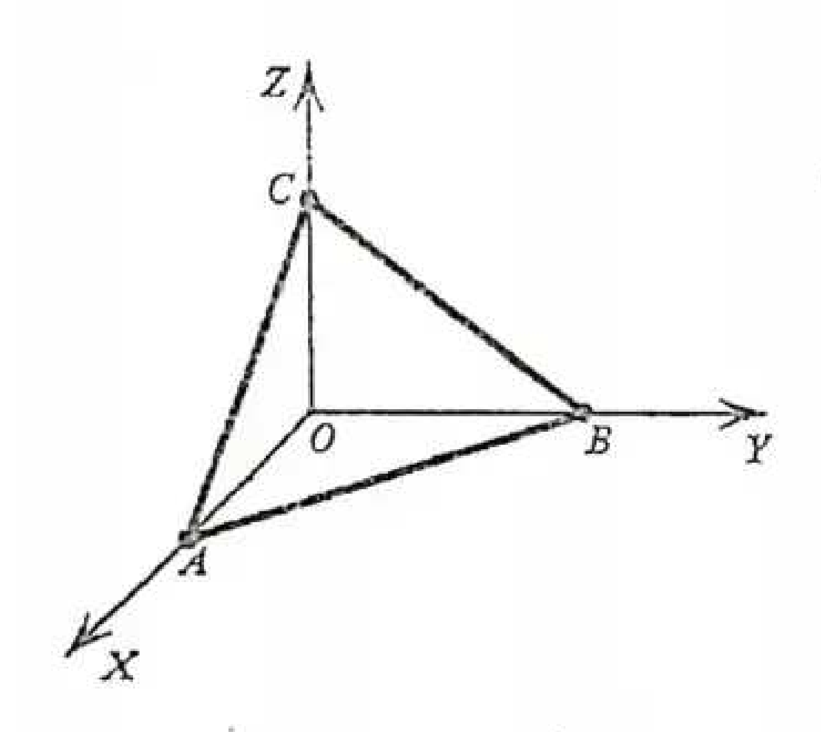
$$\mathscr{P}: \quad (5,-3,-2)\cdot(x-0,y+2,z-3)=0$$

$$\mathscr{P}: \quad 5x-3y-2z=0$$

Hallar la ecuación general del plano que pasa por los puntos $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$, $C=(0,0,c)$ donde $abc\neq 0$



Solución.



$$\bar{a}=\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$$

$$\bar{b}=\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$$

$$\bar{n}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -a & b & 0\\ -a & 0 & c\end{vmatrix}=i(bc)-j(-ac)+k(ab)$$

$$\bar{n}=(bc,ac,ab)$$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n}\cdot(P-P_0)=0$$

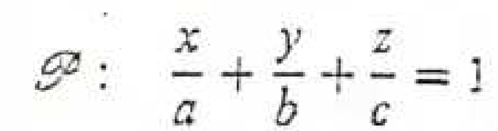
$$(bc, ac, ab)\cdot(x-a, y, z)=0$$

$$(bc)x+(ac)y+(ab)z-abc=0$$

$$\mathscr{P}: \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$







$$\mathscr{P}: \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

donde $abc \neq 0$ se llama ecuación simétrica del plano que interseca a los ejes coordenados en los puntos $A=(a,0,0)$, $B=(0,b,0)$ y $C=(0,0,c)$

Si $\mathscr{P}: \quad 3x-2y+7z=18$. Encontrar los puntos de intersección de $\mathscr{P}$ con los ejes coordenados

Solución.

$$\mathscr{P}: \quad \frac{3x}{18}-\frac{2y}{18}+\frac{7z}{18}=1$$
$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-9}+\frac{z}{\frac{18}{7}}=1$$

$$A=(6,0,0) \qquad B=(0,-9,0) \qquad C=(0,0,\frac{18}{7})$$

Un plano $\mathscr{P}$ pasa por los puntos $A=(4,2,-4)$, $B=(15,0,0)$ y $C=(0,0,-10)$. Hallar la ecuación general de $\mathscr{P}$.

Solución.

Solución.

En efecto, los puntos B y C son las intersecciones del plano $\mathscr{P}$ con los ejes X y Z respectivamente

$$\mathscr{P}: \quad \frac{x}{15}+\frac{y}{k}+\frac{z}{-10}=1$$

$$A=(4,2,-4)\in\mathscr{P}\Longrightarrow\mathscr{P}: \quad \frac{4}{15}+\frac{2}{k}+\frac{-4}{-10}=1$$

$$\frac{2}{k}=1-\frac{4}{15}-\frac{4}{10}=\frac{1}{3}\Longrightarrow k=6$$

$$\mathscr{P}: \quad \frac{x}{15}+\frac{y}{6}+\frac{z}{-10}=1\Longrightarrow\mathscr{P}: \quad 2x+5y-3z=30$$

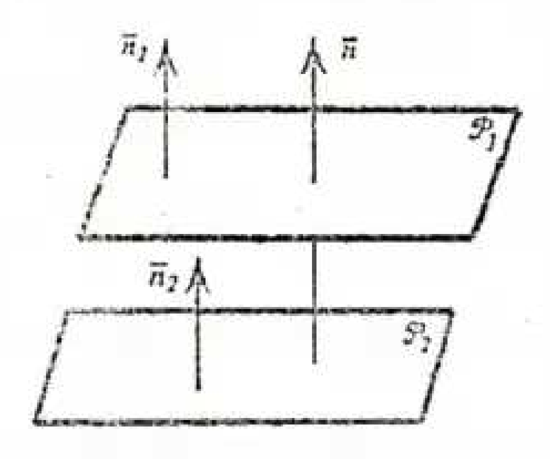


4.2.2.1 Intersección de planos

En esta parte, vamos a discutir el problema de determinar las condiciones bajo las cuales dos planos se intersecan, las mismas dependen de que los planos sean o no paralelos.

Definición

Dos planos son paralelos si sus respectivas normales son paralelas.



Nota

1) Si $\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1\cdot(P-P_0)=0$ y $\mathscr{P}_2: \quad \bar{n}_2\cdot(P-Q_0)=0$ entonces

$$\mathscr{P}_1\parallel\mathscr{P}_2\Longleftrightarrow\bar{n}_1\parallel\bar{n}_2$$

2) Dos planos paralelos tienen la misma normal $\bar{n}$

Proposición [illegible]

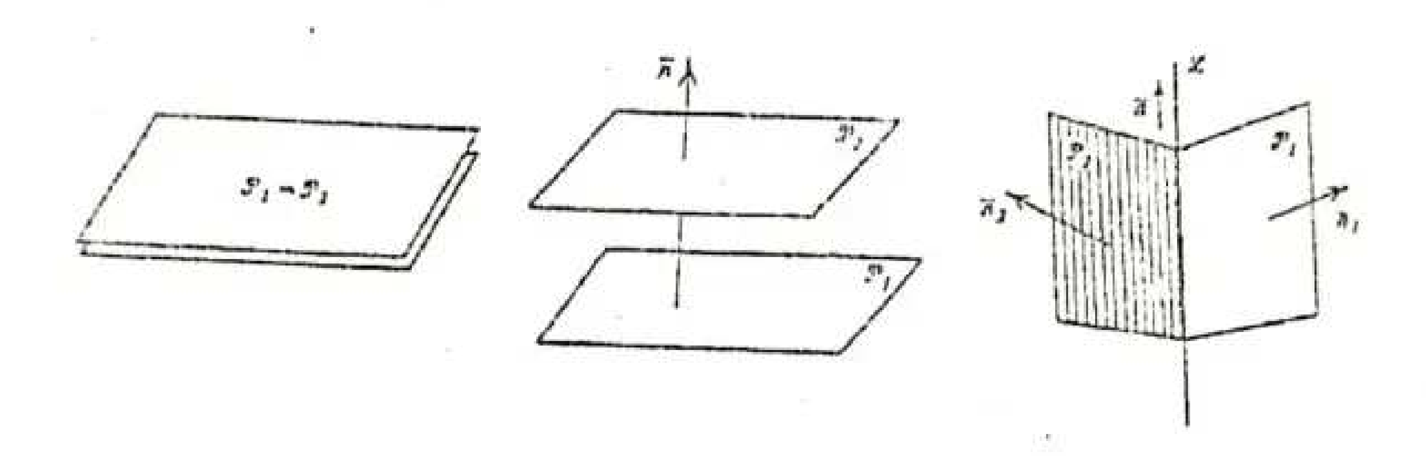
Si dos planos son paralelos entonces pueden ser coincidentes o no tienen puntos en común, y si los planos no son paralelos su intersección es una recta.

Teorema [illegible]

1) Si $\mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2$ ó $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$

2) Si $\mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$ (una recta)





Demostración. Sean los planos

$$\mathscr{P}_1 = \{P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} / r, s \in \} \text{ donde } \bar{a} \nparallel \bar{b}$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{n} \cdot (P - Q_0) = 0 \text{ donde } \bar{n} \neq \bar{0}$$

1) Si $\mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}_2$ entonces

$$\bar{n} \parallel (\bar{a} \times \bar{b})$$
$$\bar{n} \cdot \bar{a} = 0 \text{ y } \bar{n} \cdot \bar{b} = 0$$

Si $P \in \mathscr{P}_1$ entonces

$$P = P_0 + r\bar{a} + s\bar{b} \text{ para algún } r, s \in \mathbb{R} \tag{4.66}$$

Si $P \in \mathscr{P}_2$ entonces

$$\bar{n} \cdot (P - Q_0) = 0 \tag{4.67}$$

$$\bar{n}\cdot(P_0+r\bar{a}+s\bar{b}-Q_0)=0$$
$$\bar{n}\cdot(P_0-Q_0)+\bar{n}\cdot(r\bar{a}+s\bar{b})=0$$
$$\bar{n}\cdot(r\bar{a}+s\bar{b})=\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)$$
$$(\bar{n}\cdot\bar{a})r+(\bar{n}\cdot\bar{b})s=\bar{n}\cdot(Q_0-P_0) \qquad (4.68)$$

(a) Si $\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)=0$ entonces

$$\forall r,s\in\mathbb{R} \qquad (\bar{n}\cdot\bar{a})r+(\bar{n}\cdot\bar{b})s=\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)$$

puesto que

$$\bar{n}\cdot\bar{a}=0 \text{ y } \bar{n}\cdot\bar{b}=0$$

y por lo tanto $P_0\in\mathscr{P}_2$ entonces $\mathscr{P}_1=\mathscr{P}_2$

(b) Si $\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)\neq 0$ entonces no existen $r,s\in\mathbb{R}$ tales que

$$(\bar{n}\cdot\bar{a})r+(\bar{n}\cdot\bar{b})s=\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)\Longrightarrow P_0\notin\mathscr{P}_2$$

y por tanto $\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2=\emptyset$

2) Si $\mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2$ entonces

$$\bar{n}\cdot\bar{a}\neq 0 \text{ ó } \bar{n}\cdot\bar{b}\neq 0$$

Si $P\in\mathscr{P}_1\cap\mathscr{P}_2$ se obtuvo la ecuación (4.68).

En (4.68) supongamos que $\bar{n}\cdot\bar{a}\neq 0$ entonces

$$r=\frac{\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)-(\bar{n}\cdot\bar{b})s}{\bar{n}\cdot\bar{a}}$$

reemplazando este valor en (4.66)

$$P=P_0+\Big(\frac{\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)-(\bar{n}\cdot\bar{b})s}{\bar{n}\cdot\bar{a}}\Big)\bar{a}+s\bar{b}$$
$$=P_0+\frac{\bar{n}\cdot(Q_0-P_0)}{\bar{n}\cdot\bar{a}}\bar{a}+\Big(\bar{b}-\frac{\bar{n}\cdot\bar{b}}{\bar{n}\cdot\bar{a}}\bar{a}\Big)s$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{P_0 + \frac{\bar{n} \cdot (Q_0 - P_0)}{\bar{n} \cdot \bar{a}} \bar{a} + \left(\bar{b} - \frac{\bar{n} \cdot \bar{b}}{\bar{n} \cdot \bar{a}} \bar{a}\right) s,\ s \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}$$

es la ecuación de una recta con vector direccional

$$\left(\bar{b} - \frac{\bar{n} \cdot \bar{b}}{\bar{n} \cdot \bar{a}} \bar{a}\right) \neq \bar{0}$$

puesto que $\bar{a} \nparallel \bar{b}$.

◇





Analizar la intersección de los siguientes planos

$$\mathscr{P}_1 = \{(3, -2, 1) + r(1, 0, -1) + s(4, 3, 1)\}$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 3x - 5y + 3z = 22$$

Solución.

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{a} = (1, 0, -1), \bar{b} = (4, 3, 1)$$

y

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i(3) - j(5) + k(3) = (3, -5, 3) = \bar{n}_1$$

$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{n}_2 = (3, -5, 3)$$

$$\bar{n}_2 \parallel \bar{n}_1 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}_2$$

bastará probar que el punto de paso $P_1 = (3, -2, 1)$ de $\mathscr{P}_1$ pertenece a $\mathscr{P}_2$ entonces reemplazando P_1 en $\mathscr{P}_2$

$$\mathscr{P}_2 : \quad 3(3) - 5(-2) + 3(1) = 22 \Longrightarrow P_1 \in \mathscr{P}_2$$

Por lo tanto

$$\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2$$



Analizar la intersección de los siguientes planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad x - 7y + 3z = 8$$
$$\mathscr{P}_2 = \{(1, 0, -2) + r(4, 1, 1) + s(-3, 0, 1)\}$$



Solución.

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{n}_1 = (1, -7, 3)$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{a} = (4, 1, 1),\ \bar{b} = (-3, 0, 1) \Longrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = (1, -7, 3) = \bar{n}_2$$

luego

$$\bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}_2$$

Veamos si $P_2 = (1, 0, -2) \in \mathscr{P}_1$ reemplazando $P_2 \in \mathscr{P}_1$

$$\mathscr{P}_1 : \quad 1 - 7(0) + 3(-2) = -5 \neq 8 \Longrightarrow P_2 \notin \mathscr{P}_1$$

Por tanto

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$$

Ejemplo 469

Analizar la intersección de los planos

$$\mathscr{P}_1 = \{(4, 2, 2) + r(1, 1, 1) + s(3, 1, -1)\}$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 3x - 5y + 2z = 12$$

Solución.

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{a} = (1, 1, 1),\ \bar{b} = (3, 1, -1) \Longrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = (-2, 4, -2) \parallel \bar{n}_1 = (1, -2, 1)$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{n}_2 = (3, -5, 2)$$

$$\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$$

(una recta)

$$\text{Si } P \in \mathscr{P}_1 \Longrightarrow P = (4 + r + 3s, 2 + r + s, 2 + r - s)$$
$$\text{Si } P \in \mathscr{P}_2 \Longrightarrow 3(4 + r + 3s) - 5(2 + r + s) + 2(2 + r - s) = 12$$

operando

$$2s = 6 \Longrightarrow s = 3$$



Luego $P = (13 + r, 5 + r, -1 + r)$, entonces

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{(13, 5, -1) + r(1, 1, 1) / r \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}$$



Hallar la intersección de los siguientes planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x - 3y + z = -3$$
$$\mathscr{P}_2 = \{(6, 8, -1) + r(-1, 2, 0) + t(3, 3, 1)\}$$

Solución.

$$\mathscr{P}_1 : \quad \vec{n}_1 = (2, -3, 1)$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad \vec{a} = (-1, 2, 0) \qquad \vec{b} = (3, 3, 1) \Longrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = (2, 1, -9) = \vec{n}_2$$

$$\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$$

(una recta)

Si $P \in \mathscr{P}_2$ entonces

$$P = (6 - r + 3t, 8 + 2r + 3t, -1 + t), \text{ para algún } t, r \in \mathbb{R} \qquad (4.69)$$

Si $P \in \mathscr{P}_1$ entonces

$$2(6 - r + 3t) - 3(8 + 2r + 3t) + (-1 + t) = -3$$

$$2(6-r+3t)-3(8+2r+3t)+(-1+t)=-3$$

operando

$$8r+2t=-10 \Longrightarrow 4r+t=-5$$

despejando $t=-5-4r$ y reemplazando en (4.69)

$$P=(6-r+3(-5-4r),8+2r+3(-5-4r),-1+(-5-4r))$$
$$P=(-9-13r,-7-10r,-6-4r)$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{(-9,-7,-6)+r(13,10,4)/r \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}$$

Ejemplo 4.71

Hallar la intersección de los siguientes planos

$$\left.\begin{array}{ll}\mathscr{P}_1: & x-2y+3z=-5 \\ \mathscr{P}_2: & 3x-y+7z=0\end{array}\right\} AX=B$$

Solución.

$$\left.\begin{array}{ll}\mathscr{P}_1: & \bar{n}_1=(1,-2,3) \\ \mathscr{P}_2: & \bar{n}_2=(3,-1,7)\end{array}\right\} \bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$$

En este caso el problema se reduce a resolver un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 7 & 0\end{array}\right)$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 3\end{array}\right)=(E_A|E_B)$$

$r(A)=r(A|B)=2<n$ entonces existe $n-2=1$ incógnita arbitraria

$$S=\{1-\frac{11}{5}t,3+\frac{2}{5}t,t\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{(1,3,0)+t(-\frac{11}{5},\frac{2}{5},1)/t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{(1,3,0) + t(-\tfrac{11}{5}, \tfrac{2}{5}, 1)/t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \{(1,3,0) + t(-11,2,5)/t \in \mathbb{R}\} = \mathscr{L}$$

Nota

Si $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$ entonces $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}_1$ y $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}_2$ entonces $\bar{a} \perp \bar{n}_1$ y $\bar{a} \perp \bar{n}_2$, luego $\bar{a} \parallel \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$. Es decir, si dos planos se intersecan el vector direccional de la recta de intersección es paralela al producto vectorial de las normales de los planos.

Ejemplo 4.72

Hallar la ecuación del plano determinado por las rectas

$$\mathscr{L}_1: \begin{cases} x - y = 7 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

$$\mathscr{L}_2: \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

y que pasa por el punto $P_0 = (-7, 2, 6)$.

Solución.

$\mathscr{L}_1 = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ donde

$$\begin{cases} \mathscr{P}_1: \quad x - y = 7 \Longrightarrow \bar{n}_1 = (1, -1, 0) \\ \mathscr{P}_2: \quad y + z = 4 \Longrightarrow \bar{n}_2 = (0, 1, 1) \end{cases}$$

$\mathscr{L}_2 = \mathscr{P}_3 \cap \mathscr{P}_4$ donde

$$\begin{cases} \mathscr{P}_3: \quad x + y + z = 3 \Longrightarrow \bar{n}_3 = (1, 1, 1) \\ \mathscr{P}_4: \quad x - z = 0 \Longrightarrow \bar{n}_4 = (1, 0, -1) \end{cases}$$

$$\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (-1, -1, 1)$$

$$\mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = \bar{n}_3 \times \bar{n}_4 = (-1, 2, -1)$$

$\mathscr{L}_2 \parallel b = n_3 \times n_4 = (-1, 2, -1)$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (1, 2, 3)$$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

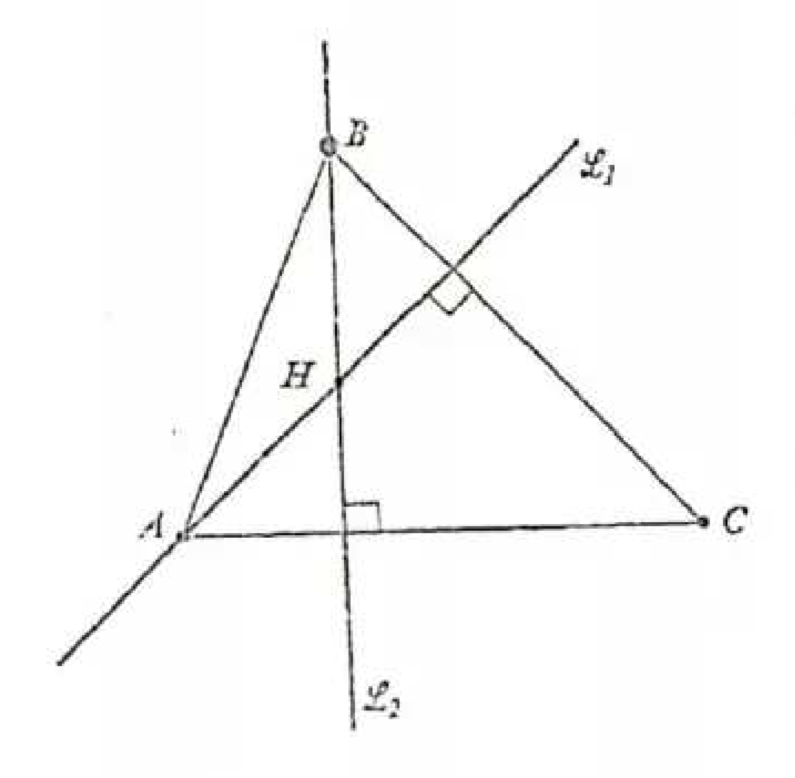
$$\mathscr{P}: \quad (1, 2, 3) \cdot (x + 7, y - 2, z - 6) = 0$$

$$\mathscr{P}: \quad x + 2y + 3z = 15$$

Ejemplo 4.7[illegible]

Dado el triángulo ABC, donde $A = (1, 2, -1)$, $B = (-1, 2, 1)$, $C = (2, 1, 3)$. Hallar el ortocentro H de dicho triángulo

Solución.



Vamos a resolver este problema usando intersección de planos

$$\left.\begin{aligned} \bar{a} &= \overrightarrow{AC} = (1, -1, 4) \\ \bar{b} &= \overrightarrow{AB} = (-2, 0, 2) \end{aligned}\right\} \bar{a} \times \bar{b} \parallel (1, 5, 1)$$

$$\mathscr{P}_{ABC}: \quad x + 5y + z = 10$$

$\mathscr{P}_A$: El plano que pasa por A con vector normal $\overrightarrow{BC} = (3, -1, 2)$, luego

$$\mathscr{P}_A: \quad 3x - y + 2z = -1$$

$\mathscr{P}_B$: El plano que pasa por B con vector normal $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 4)$, luego

$$\mathscr{P}_B: \quad x - y + 4z = 1$$

$$\mathscr{L}_1 = \mathscr{P}_A \cap \mathscr{P}_{ABC}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$



$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{31}{16} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{\frac{5}{16} - \frac{11}{16}t, \frac{31}{16} - \frac{1}{16}t, t\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(\frac{5}{16}, \frac{31}{16}, 0) + t(-11, -1, 16)/t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{L}_2 = \mathscr{P}_B \cap \mathscr{P}_{ABC}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{\frac{5}{2} - \frac{7}{2}k, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}k, k\} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0) + k(-7, 1, 2)/k \in \mathbb{R}\}$$

El ortocentro del triángulo ABC es la intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$

$$(\frac{5}{16}, \frac{31}{16}, 0) + t(-11, -1, 16) = (\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0) + k(-7, 1, 2)$$

$$(\frac{\ }{16}, \frac{\ }{16}, 0) + t(-11, -1, 16) = (\frac{\ }{2}, \frac{\ }{2}, 0) + k(-7, 1, 2)$$

entonces

$$k = \frac{7}{18}, \qquad t = \frac{7}{144}$$

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = H = (-\frac{2}{9}, \frac{17}{9}, \frac{7}{9})$$

Nota

Este ejemplo fue resuelto en el Ejercicio 4.36, usando vectores en este caso hemos utilizado intersección de planos.



4.2.2.2 Ángulo entre dos planos

Definición 4.?

El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales, se denota por $m\angle(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \theta$

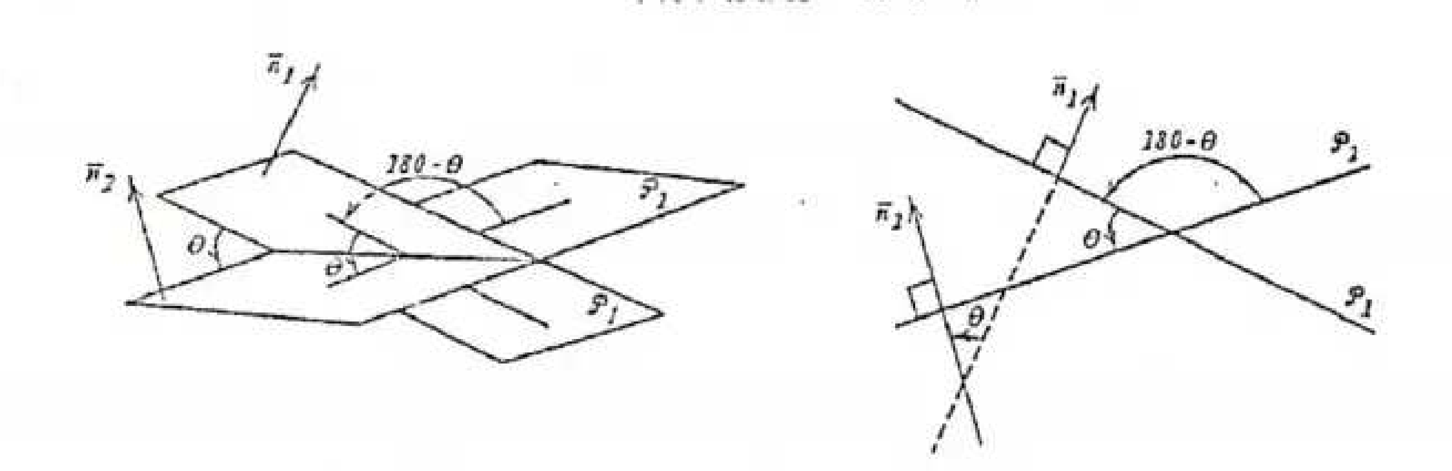
Nota

1) Si $\bar{n}_1$ y $\bar{n}_2$ son vectores normales de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ respectivamente entonces

$$m\angle(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = m\angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$$

2) Si $m\angle(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \theta$ entonces $0 \leq \theta \leq \pi$.

3) La intersección de dos planos determina dos ángulos adyacentes suplementarios.



Nota

Para ubicar los planos en un gráfico:

Si las normales de los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son $\bar{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\bar{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ respectivamente, entonces:

1) Considerar que las componentes de las normales sobre el eje Z sean positivas, es decir $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$.

2) Para determinar el abanico de los planos, ordenar las componentes de las normales sobre el eje Z, en forma creciente y en sentido horario. Por ejemplo, en



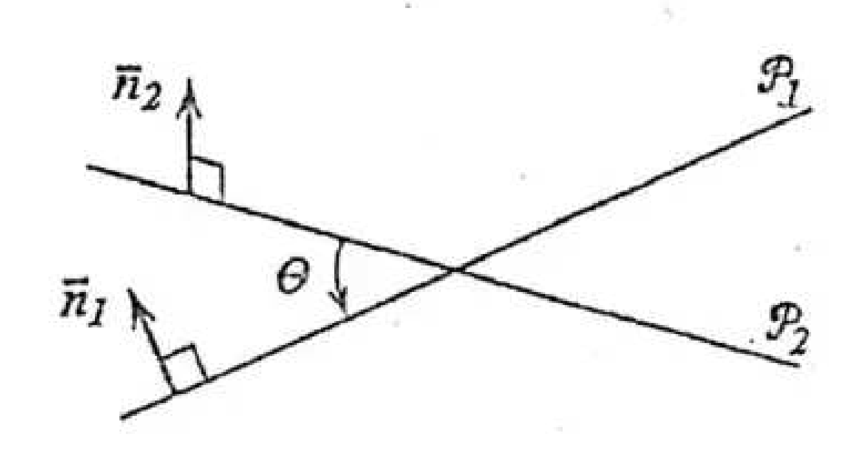
la Figura anterior $0 < c_2 < c_1$.

Ejemplo 4.34

Hallar el ángulo entre los planos

$$\mathcal{P}_1: \quad 3x - y + z = 8$$
$$\mathcal{P}_2: \quad x + y + 3z = 2$$

Solución.



$\bar{n}_1 = (3, -1, \textcircled{1})$ $\bar{n}_2 = (1, 1, \textcircled{3})$ entonces $0 < 1 < 3$

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{5}{\sqrt{11}\sqrt{11}} = \frac{5}{11} > 0$$

θ es agudo

$$m\angle(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \theta = \arccos\frac{5}{11}$$

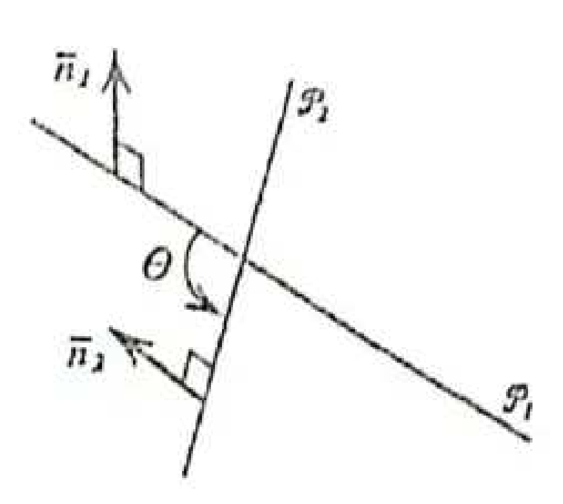


Hallar el ángulo entre los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad x - y + 4z = 7$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 6x - 5y - 2z = 1$$



Solución.



$\bar{n}_1 = (1, -1, ④)$ $\bar{n}_2 = (-6, 5, ②)$ entonces $0 < 2 < 4$

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{-3}{\sqrt{65}\sqrt{18}} = \frac{-1}{\sqrt{65}\sqrt{2}}$$

θ es obstuso

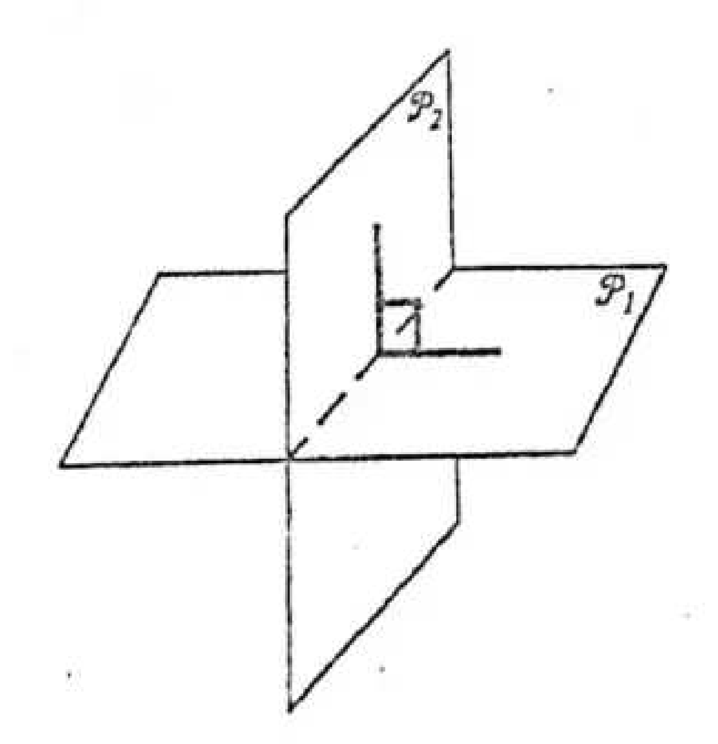
$$m\angle(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \arccos(\frac{-1}{\sqrt{65}\sqrt{2}})$$



Hallar el ángulo entre los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 3x - 5y + z = 3$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad x + y + 2z = 19$$

Solución.







$$\bar{n}_1 = (3, -5, 1), \qquad \bar{n}_2 = (1, 1, 2)$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = 0$$

entonces

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2$$

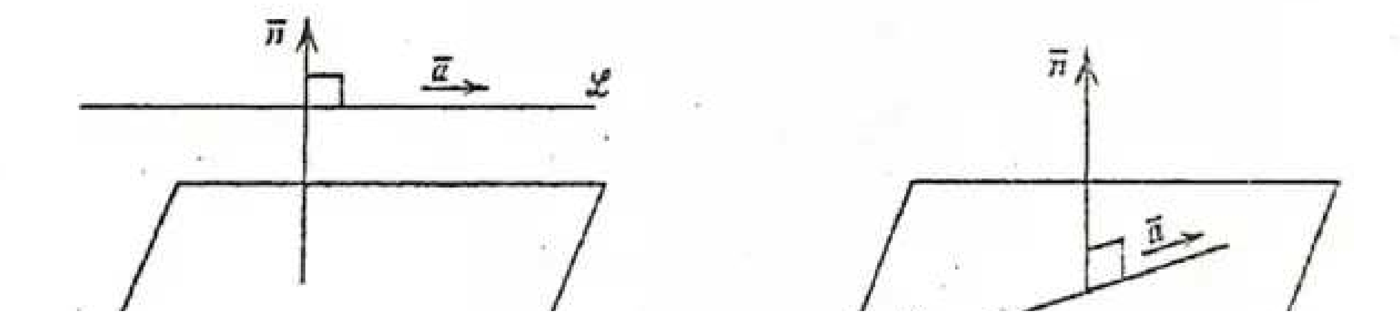
4.2.2.3 Intersección de una recta y un plano

¿Cuándo decimos que una recta es paralela a un plano?

La respuesta nos da la siguiente definición.

Definición 4.45

Una recta $\mathscr{L}$ es **paralela** a un plano $\mathscr{P}$, se denota por $\mathscr{L} \parallel \mathscr{P}$ si $\mathscr{L}$ es ortogonal a una normal de $\mathscr{P}$



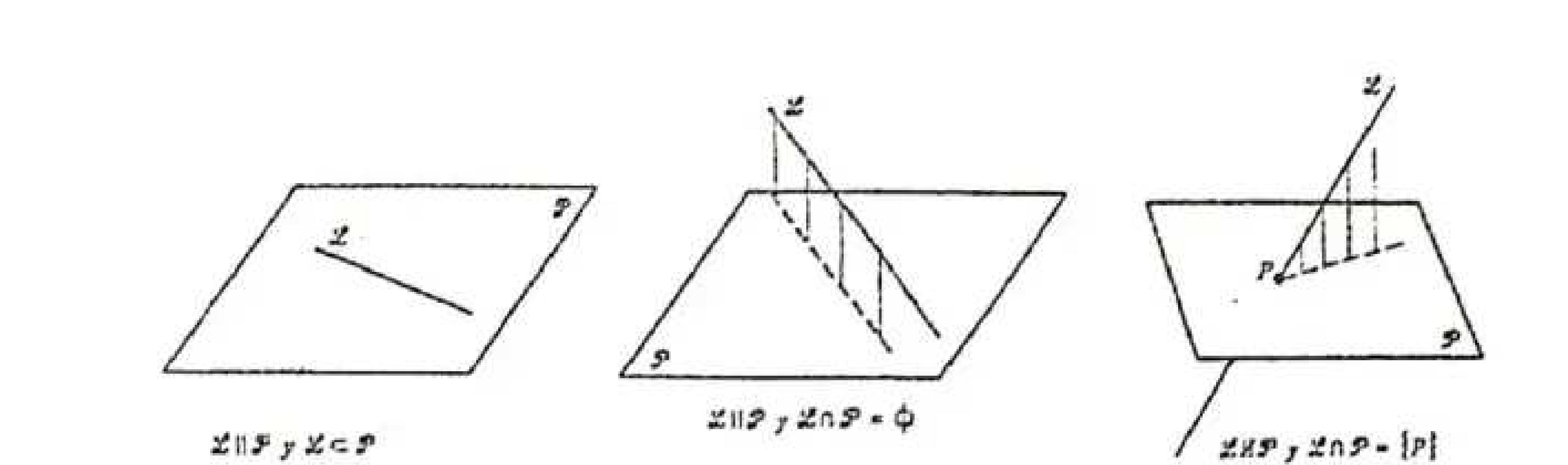


Teorema 4.12

1) Si $\mathscr{L} \parallel \mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{L} \subset \mathscr{P}$ ó $\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \emptyset$.

2) Si $\mathscr{L} \nparallel \mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \{P\}$ un punto





Demostración. 1) Sea $\mathscr{L} = \{P_0 + t\bar{a}\}$ la ecuación vectorial de una recta con vector direccional $\bar{a} \neq \bar{0}$ y sea $\mathscr{P} = \{P/\bar{n} \cdot P = d\}$ la ecuación general del plano $\mathscr{P}$ con normal $\bar{n} \neq \bar{0}$.

Si $P \in \mathscr{L}$ entonces

$$P = P_0 + t\bar{a} \text{ para algún } t \in \mathbb{R}$$

En $\mathscr{P}$

$$\bar{n} \cdot P = d$$

$$\bar{n} \cdot (P_0 + t\bar{a}) = d$$

$$(\bar{n} \cdot P_0) + t(\bar{n} \cdot \bar{a}) = d$$

$$t(\bar{n} \cdot \bar{a}) = d - (\bar{n} \cdot P_0) \qquad (4.70)$$

Por hipótesis $\mathscr{L} \parallel \mathscr{P}$ entonces

$$\bar{n} \perp \bar{a} \Longrightarrow \bar{n} \cdot \bar{a} = 0$$

(a) Si $d - (\bar{n} \cdot P_0) \neq 0$ entonces no existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaga (4.70) y entonces $\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \emptyset$.

(b) Si $d - (\bar{n} \cdot P_0) = 0$ entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple (4.70), luego

$$\bar{n} \cdot P_0 = d \Longrightarrow P_0 \in \mathscr{P}$$

y por tanto $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$.



2) Si $\mathscr{L} \nparallel \mathscr{P}$ entonces $\bar{n} \cdot \bar{a} \neq 0$.

De la ecuación (4.70)

$$t = \frac{d - (\bar{n} \cdot P_0)}{\bar{n} \cdot \bar{a}}$$

es único y es el valor del parámetro en la ecuación vectorial de

$$\mathscr{L}: \quad P_0 + t\bar{a} = P_0 + \Big(\frac{d - (\bar{n} \cdot P_0)}{\bar{n} \cdot \bar{a}}\Big)\bar{a} = P,$$

es el punto común a la recta y al plano.

Es decir $\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \{P\}$ un punto



Ejemplo 4.77

Estudiar la intersección de la recta $\mathscr{L} = \{(3, -1, 4) + t(1, 1, -1)\}$ con el plano

$$\mathscr{P}: \quad 3x + 4y + 7z = 33$$

Solución.

$$\mathscr{L} \parallel \bar{a} = (1, 1, -1), \qquad \bar{n} = (3, 4, 7)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (1, 1, -1) \cdot (3, 4, 7) = 0 \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \mathscr{P}$$

Si $P_0 = (3, -1, 4) \in \mathscr{P}$ entonces $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$

Veamos

$$\mathscr{P}: \quad 3(3) + 4(-1) + 7(4) = 9 - 4 + 28 = 33$$

satisface la ecuación del plano entonces $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$



Estudiar la intersección de la recta

$$\mathscr{L} = \{(1,-5,6) + t(2,0,-3)\}$$

con el plano

$$\mathscr{P}: \quad 3x + 7y + 2z = 8$$



Solución.

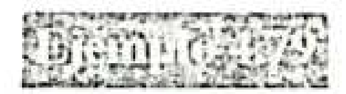
$$\mathscr{L} \parallel \bar{a} = (2,0,-3) \qquad \bar{n} = (3,7,2)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (2,0,-3) \cdot (3,7,2) = 0 \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \mathscr{P}$$

Si $P_0 = (1,-5,6) \in \mathscr{P}$ entonces $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}$
Veamos

$$\mathscr{P}: \quad 3(1) + 7(-5) + 2(6) = 3 - 35 + 12 \neq 8 \Longrightarrow P_0 \notin \mathscr{P}$$

por lo tanto $\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \emptyset$.



Estudiar la intersección de la recta

$$\mathscr{L} = \{(1,0,-2) + t(3,7,-1)\}$$

con el plano

$$\mathscr{P}: \quad 2x - 5y + z = -7$$

Solución.

$$\mathscr{L} \parallel \bar{a} = (3,7,-1), \qquad \bar{n} = (2,-5,1)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (3,7,-1) \cdot (2,-5,1) = 6 - 35 - 1 = -30 \neq 0 \Longrightarrow \mathscr{L} \nparallel \mathscr{P}$$

por lo tanto $\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = \{P\}$ un punto.

Veamos, si $P \in \mathscr{L}$ entonces

$$P = (1 + 3t, 7t, -2 - t)$$

Entonces $P \in \mathscr{P}$ entonces

$$2(1 + 3t) - 5(7t) + (-2 - t) = -7 \Longrightarrow t = \frac{7}{30}$$

entonces

$$P = \left(1 + 3\left(\frac{7}{30}\right), 7\left(\frac{7}{30}\right), -2 - \left(\frac{7}{30}\right)\right) = \left(\frac{51}{30}, \frac{49}{30}, -\frac{67}{30}\right) = \mathscr{L} \cap \mathscr{P}$$

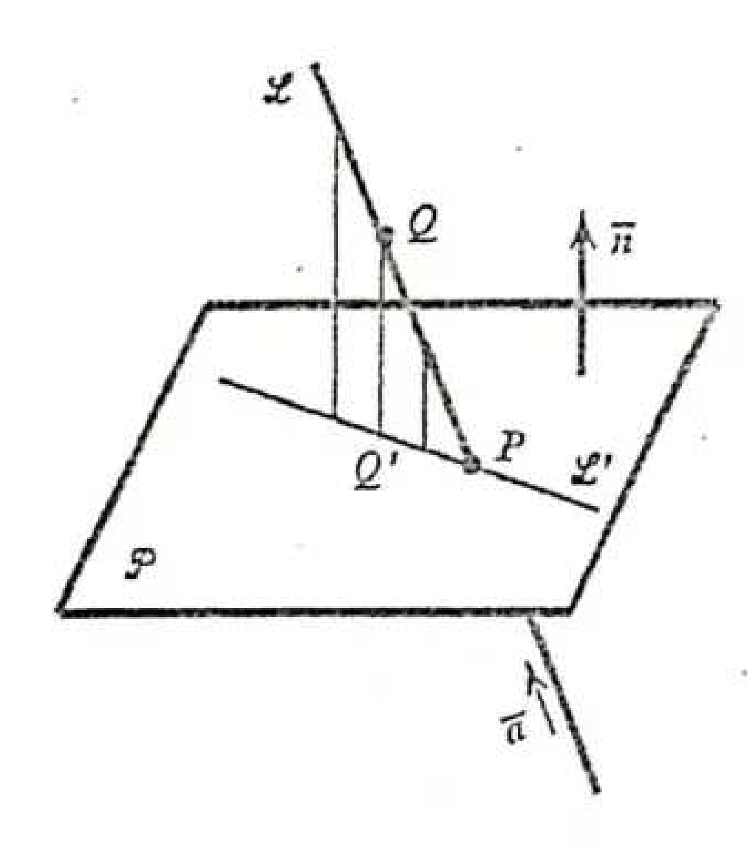
Definición 4.46

La imagen de la recta $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathscr{P}$ es la proyección ortogonal de $\mathscr{L}$ sobre $\mathscr{P}$. Se denota por $\mathscr{L}'$.

Ejemplo 4.80

En el Ejemplo 4.79, hallar la imagen de la recta $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathscr{P}$.

Solución.



Tomemos sobre la recta $\mathscr{L}$ un punto $Q \neq P$. La recta que pasa por Q ortogonal a $\mathscr{P}$ es

$$\mathscr{L}_1 = \{Q + t\vec{n}\} \qquad \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{P} = Q'$$

$$\mathscr{L}_Q = \{Q + rn\}, \qquad \mathscr{L}_Q \cap \mathscr{P} = Q'$$

entonces

$$\mathscr{L}' = \{Q' + t\overrightarrow{Q'P}\}$$

En efecto, si $Q = (-5, -14, 0) \in \mathscr{L}$

$$\mathscr{L}_Q = \{(-5, -14, 0) + r(2, -5, 1)\}$$

$$\mathscr{L}_Q \cap \mathscr{P} : \quad 2(-5 + 2r) - 5(-14 - 5r) + r = -7 \Longrightarrow r = -\frac{67}{30}$$



luego

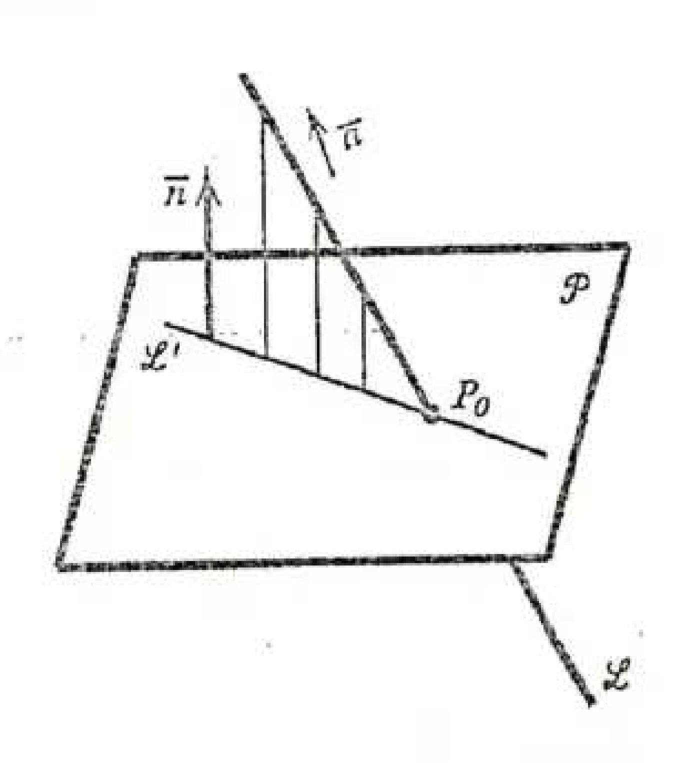
$$Q' = \left(-\frac{284}{30}, -\frac{85}{30}, -\frac{67}{30}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Q'P} \parallel \mathscr{L}' &= \left\{\left(-\frac{284}{30}, -\frac{85}{30}, -\frac{67}{30}\right) + t(335, 134, 0)\right\} \\ &= \left\{\left(-\frac{284}{30}, -\frac{85}{30}, -\frac{67}{30}\right) + t(5, 2, 0)\right\}\end{aligned}$$

Otro método

Usando la intersección de planos, podemos hallar la imagen de una recta sobre un plano.

Veamos en el Ejemplo 4.79



$$\mathscr{L} = \{(1,0,-2) + t(3,7,-1)\} \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \bar{a} = (3,7,-1)$$
$$\mathscr{P}: \quad 2x - 5y + z = -7 \Longrightarrow \mathscr{P}: \quad \bar{n} = (2,-5,1)$$

Sea $\mathscr{P}_1$ el plano determinado por los vectores $\bar{a}$ y $\bar{n}$ con punto de paso

$$P_0 = \left(\frac{51}{30}, \frac{49}{30}, -\frac{67}{30}\right) = \mathscr{L} \cap \mathscr{P} = P$$

$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1 = \bar{a} \times \bar{n} = (2,-5,-29)$$



$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1 \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(2,-5,-29) \cdot \left(x - \frac{51}{30}, y - \frac{49}{30}, z + \frac{67}{30}\right) = 0$$
$$\mathscr{P}: \quad 2x - 5y - 29z = 60 \qquad (\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P})$$

Entonces

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P} = \mathscr{L}' = \{(-\frac{143}{60}, 0, -\frac{67}{30}) + r(5,2,0)\}$$

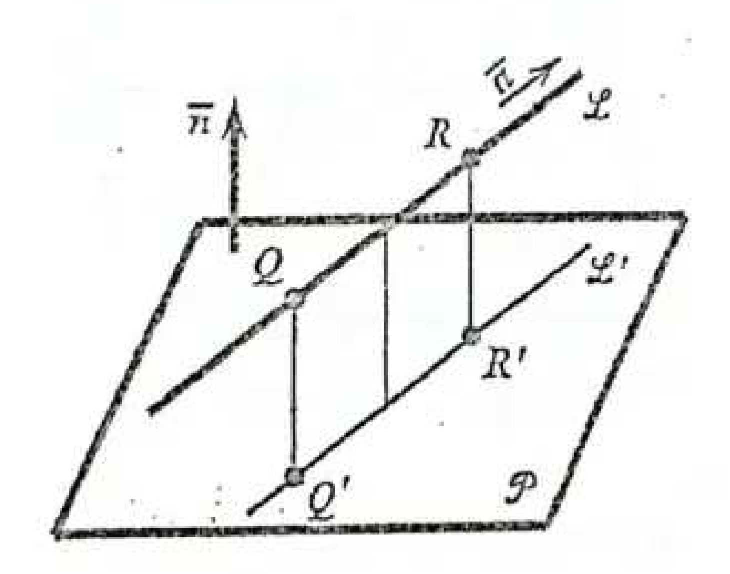
Nota

Por ambos métodos se obtiene la misma recta $\mathscr{L}'$ (imagen de $\mathscr{L}$ sobre $\mathscr{P}$)

Ejemplo 4.81

En el Ejemplo 4.78, hallar la imagen de la recta $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathscr{P}$.

Solución.



Tomamos sobre la recta $\mathscr{L}$ dos puntos diferentes Q y R.

$\mathscr{L}_Q$ y $\mathscr{L}_R$ son rectas que pasan por Q y R respectivamente ortogonales al plano $\mathscr{P}$.

$$\mathscr{L}_Q \cap \mathscr{P} = Q', \qquad \mathscr{L}_R \cap \mathscr{P} = R' \Longrightarrow \mathscr{L}' = \{Q' + t\overrightarrow{Q'R'}\}$$

Sea $Q = (3, -5, 3)$ y $R = (-3, -5, 12)$

$$\mathscr{L}_Q = \{(3, -5, 3) + k(3, 7, 2)\}$$



$$\mathscr{L}_R = \{(-3, -5, 12) + m(3, 7, 2)\} \qquad k = m = \frac{14}{31}$$

$$\mathscr{L}_Q \cap \mathscr{P} = Q' = \left(\frac{135}{31}, \frac{-57}{31}, \frac{121}{31}\right)$$
$$\mathscr{L}_R \cap \mathscr{P} = R' = \left(-\frac{51}{31}, -\frac{57}{31}, \frac{400}{31}\right)$$

$$\overrightarrow{Q'R'} = \left(-\frac{186}{31}, 0, \frac{279}{31}\right) \parallel (-2, 0, 3)$$
$$\mathscr{L}' = \left\{\left(\frac{135}{31}, -\frac{57}{31}, \frac{121}{31}\right) + t(2, 0, -3)\right\}$$

Otro método

Usando intersección de planos, como datos tenemos

$$\mathscr{L} = \{(1, -5, 6) + t(2, 0, -3)\} \Longrightarrow \mathscr{L} \parallel \bar{a} = (2, 0, -3)$$
$$\mathscr{P}: \quad 3x + 7y + 2z = 8 \Longrightarrow \mathscr{P}: \bar{n} = (3, 7, 2)$$

Sea $\mathscr{P}_1$ el plano determinado por los vectores no paralelos $\bar{a}$ y $\bar{n}$ y que contiene a $\mathscr{L}$, entonces el punto de paso de $\mathscr{P}_1$ es $P_1 = (1, -5, 6)$.

$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1 \cdot (P - P_1) = 0$$

donde $\bar{n}_1 = \bar{a} \times \bar{n} = (21, -13, 14)$

$$\mathscr{P}_1 : \quad (21, -13, 14) \cdot (x-1, y+5, z-6) = 0$$

$$\mathscr{P}_1 : \quad 21x - 13y + 14z = 170 \qquad (\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P})$$

Entonces

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P} = \mathscr{L}' = \left\{ \left(\frac{647}{93}, \frac{-57}{31}, 0 \right) + t(-2, 0, 3) \right\}$$

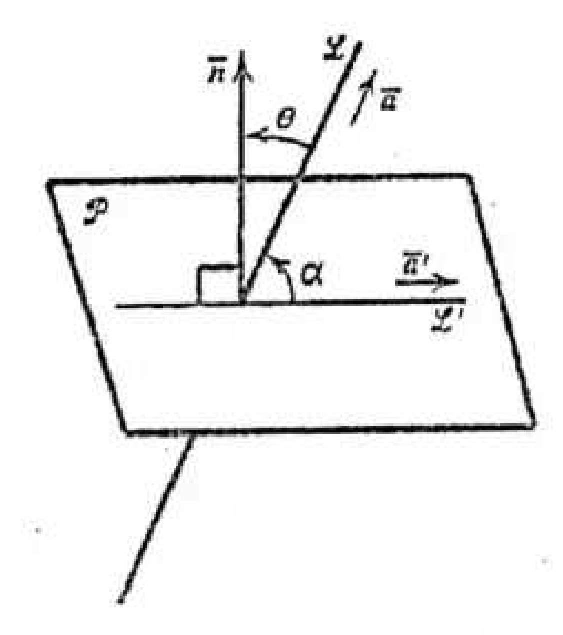


Por ambos métodos obtenemos la misma recta $\mathscr{L}'$ (imagen de $\mathscr{L}$ sobre $\mathscr{P}$)

4.2.2.4 Ángulo entre recta y plano

Definición 4.47

El ángulo entre una recta $\mathscr{L}$ y un plano $\mathscr{P}$ es el ángulo que forma $\mathscr{L}$ con $\mathscr{L}'$ donde $\mathscr{L}'$ es la imagen de $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathscr{P}$, se denota por $m\angle(\mathscr{L}, \mathscr{P}) = \alpha$



$$m\angle(\mathscr{L}, \mathscr{P}) = m\angle(\mathscr{L}, \mathscr{L}') = \alpha$$

$\alpha = 90° - \theta$



Se observa que α es el complemento del ángulo θ formado por $\mathscr{L}$ y el vector

normal al plano $\mathscr{P}$, de modo que

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}||\bar{a}|}, \quad \alpha = 90^\circ - \theta \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(90-\theta) = \cos\theta$$

Ejemplo 4.82

Sea $\mathscr{P}: \quad x - 7y + 3z = 1$ y $\mathscr{L} = \{(1,3,-1) + k(1,2,2)\}$. Hallar la medida del ángulo que forma $\mathscr{L}$ y $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (1,-7,3) \text{ y } \mathscr{L} \parallel \bar{a} = (1,2,2)$$
$$\bar{n}\cdot\bar{a} \neq 0 \Longrightarrow \mathscr{L} \nparallel \mathscr{P}$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}||\bar{a}|} = \frac{(1,-7,3)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{59}(3)} = \frac{-7}{3\sqrt{59}}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(90-\theta) = \cos\theta = \frac{-7}{3\sqrt{59}} \Longrightarrow \alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{-7}{3\sqrt{59}}\right)$$

Otro método

Hallando la imagen de la recta $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathscr{P}$. Entonces

$$P_1 = \mathscr{L}\cap\mathscr{P} = \left(-\frac{17}{7}, -\frac{27}{7}, -\frac{55}{7}\right)$$

$\mathscr{P}_1$ es el plano determinado por $\bar{a} = (1,2,2)$ y $\bar{n} = (1,-7,3)$ y que pasa por P_1

$$\mathscr{P}_1: \quad 20x - y - 9z = 26 \qquad (\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P})$$
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P} = \mathscr{L}' = \left\{\left(\frac{181}{139}, \frac{6}{139}, 0\right) + t(66,69,139)\right\}$$
$$m\angle(\mathscr{L},\mathscr{P}) = m\angle(\mathscr{L},\mathscr{L}') = \alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}\cdot\bar{a}'}{|\bar{a}||\bar{a}'|} = \frac{(1,2,2)\cdot(66,69,139)}{3\sqrt{66^2+69^2+139^2}} = \frac{482}{3\sqrt{28438}} = \frac{\sqrt{482}}{3\sqrt{59}}$$

Comprobando

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{482}{9(59)} = \frac{49}{9(59)}$$

entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{7}{3\sqrt{59}}, \ \operatorname{sen}\alpha < 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{7}{\ldots}$$

$3\sqrt{59}$ $3\sqrt{59}$

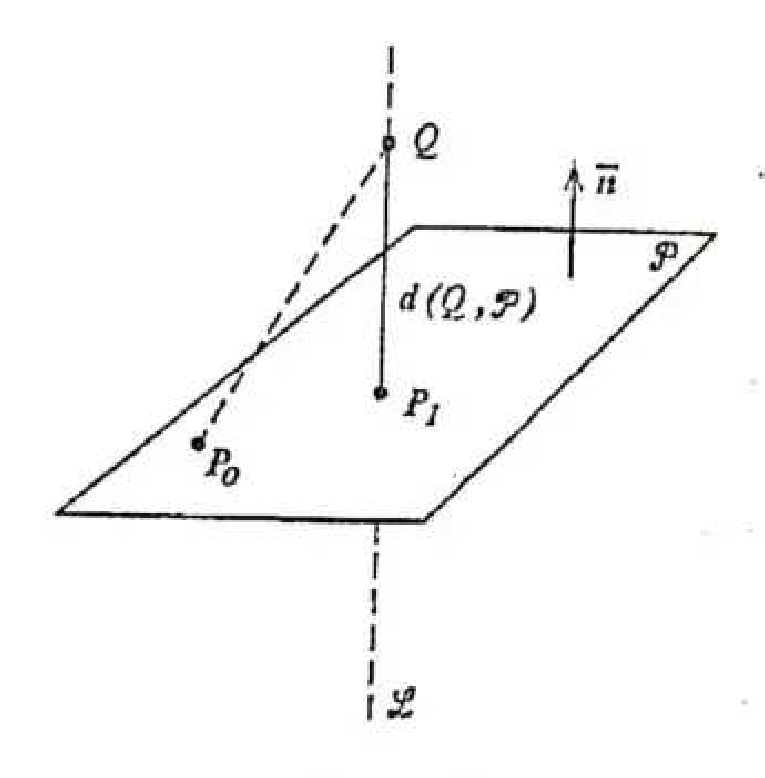
4.2.2.5 Distancia de un punto a un plano

Definición 4.48

La distancia de un punto Q a un plano $\mathscr{P}$, denotada por $d(Q, \mathscr{P})$, es la longitud medida a lo largo de una recta que pasa por Q ortogonal a $\mathscr{P}$.



En la figura



Sea

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$\mathscr{L} = \{Q + t\bar{n}\}$$

entonces

$$d(Q, \mathscr{P}) = d(Q, P_1)$$

$$d(Q, \mathscr{P}) = |\operatorname{proy}_{\bar{n}} \overrightarrow{P_0Q}|$$
$$= |\operatorname{comp}_{\bar{n}} \overrightarrow{P_0Q}|$$
$$= \left| \frac{\bar{n} \cdot (Q - P_0)}{|\bar{n}|} \right|$$

Ejemplo 4.83

Calcular la distancia del punto $Q = (3, -1, 4)$ al plano

$$\mathscr{P}: \quad 2x - 7y + 5z = 16$$

Solución.

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (2, -7, 5), \qquad P_0 = (8, 0, 0) \in \mathscr{P}$$
$$d(Q, \mathscr{P}) = \left| \frac{\bar{n} \cdot (Q - P_0)}{|\bar{n}|} \right| = \left| \frac{(2, -7, 5) \cdot (-5, -1, 4)}{\sqrt{4 + 49 + 25}} \right| = \frac{17}{\sqrt{78}}$$

Nota

Si $d(Q, \mathscr{P}) = 0$ entonces $Q \in \mathscr{P}$

Teorema 4.13

Si $\mathscr{P}: \quad ax + by + cz = d$ es un plano y $Q = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$d(Q, \mathscr{P}) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Demostración.

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (a, b, c), \qquad P_0 = (\frac{d}{a}, 0, 0) \quad a \neq 0$$

es un punto del plano $\mathscr{P}$

$$d(Q, \mathscr{P}) = \left| \frac{\bar{n} \cdot (Q - P_0)}{|\bar{n}|} \right|$$
$$= \left| \frac{(a, b, c) \cdot (x_0 - \frac{d}{a}, y_0, z_0)}{|\bar{n}|} \right|$$
$$= \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$



$\diamond$



Este teorema permite calcular la distancia de un punto a un plano de manera más simple y directa.

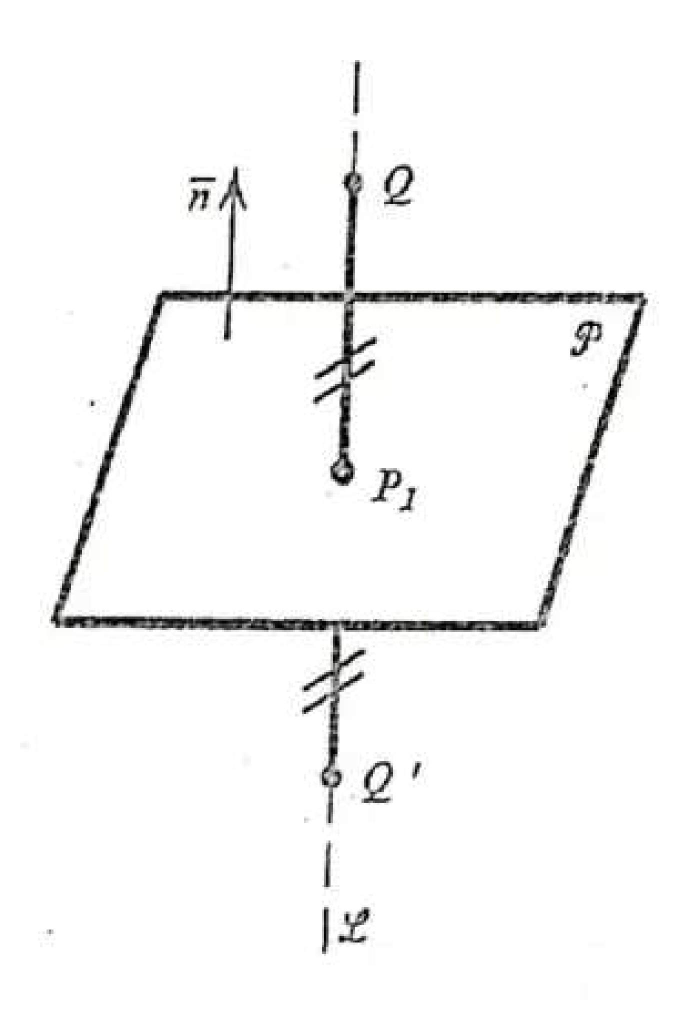
En el Ejemplo 4.83

$$d(Q, \mathscr{P}) = \left|\frac{2(3) - 7(-1) + 5(4) - 16}{\sqrt{4 + 49 + 25}}\right| = \frac{17}{\sqrt{78}}$$

Ejemplo 4.84

Si $\mathscr{P}: \quad x + y + 3z = 9$ y $Q = (2, -1, 4)$. Encontrar el punto simétrico Q' de Q con respecto al plano $\mathscr{P}$

Solución.



Sea $\mathscr{L} = \{Q + t\bar{n}\}$ la recta que pasa por Q ortogonal a $\mathscr{P}$

$$\mathscr{L} = \{(2, -1, 4) + t(1, 1, 3)\}$$

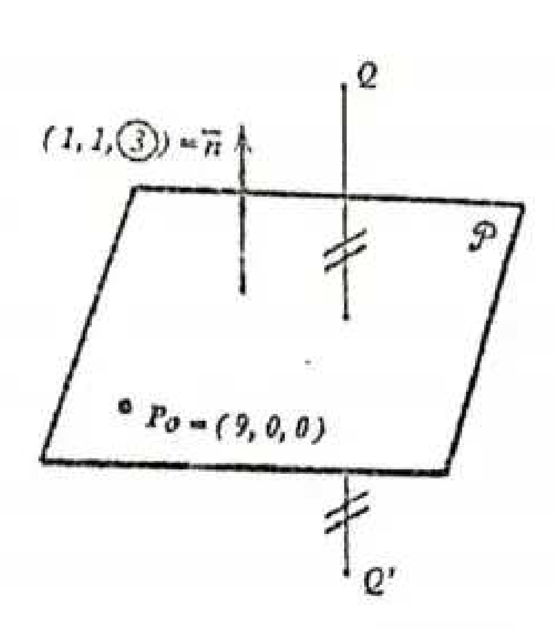
$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P}: \quad (2 + t) + (-1 + t) + 3(4 + 3t) = 9 \Longrightarrow t = \frac{-4}{11}$$

$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = P_1 = (\frac{18}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{32}{11})$$

$$P_1 = \frac{Q + Q'}{2} \Longrightarrow Q' = 2P_1 - Q = (\frac{14}{11}, -\frac{19}{11}, \frac{20}{11})$$

Otro método

Si el plano $\mathscr{P}$ y el punto Q están dados entonces conviene ubicar al punto Q con respecto al plano, es decir, saber si Q y el vector normal del plano están a un mismo lado o en lados opuestos del plano y de acuerdo a ello se puede calcular las coordenadas de Q' (punto simétrico de Q con respecto al plano).



Procedemos así: elegimos P_0 un punto de paso cualquiera de $\mathscr{P}$ y graficamos $\bar{n}$ encima de $\mathscr{P}$, es decir

$$\text{comp}_{(\text{eje } Z+)}\, \bar{n} > 0$$

$$\overrightarrow{P_0Q} = Q - P_0 = (2, -1, 4) - (9, 0, 0) = (-7, -1, 4)$$

$$\text{comp}_{\bar{n}}\, \overrightarrow{P_0Q} = \frac{\bar{n} \cdot (Q - P_0)}{|\bar{n}|} = \frac{(1, 1, 3) \cdot (-7, -1, 4)}{|\bar{n}|} = \frac{-7 - 1 + 12}{|\bar{n}|} > 0$$

entonces $\overrightarrow{P_0Q}$ y $\bar{n}$ están a un mismo lado del plano.

Por lo tanto, Q están arriba del plano $\mathscr{P}$.

El punto simétrico de Q es Q' que está debajo del plano $\mathscr{P}$, entonces

$$d(Q, \mathscr{P}) = \left|\frac{2 - 1 + 3(4) - 9}{\sqrt{1 + 1 + 9}}\right| = \frac{4}{\sqrt{11}}$$

$$\begin{aligned} Q' &= Q - 2\Big(\frac{4}{\sqrt{11}}\Big)\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} \\ &= (2,-1,4) - \frac{8}{\sqrt{11}}\frac{(1,1,3)}{\sqrt{11}} \\ &= (2-\frac{8}{11}, -1-\frac{8}{11}, 4-\frac{24}{11}) \\ &= (\frac{14}{11}, -\frac{19}{11}, \frac{20}{11}) \end{aligned}$$

Nota

1) Este método es mucho más simple para ubicar un punto con respecto a un plano (ver observación 5 de la Sección 4.1.9)

2) Si $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ y $n_3 > 0$ entonces $\bar{n}$ está encima del plano $\mathscr{P}$.

3) Si $\overrightarrow{P_0Q} = \bar{a}$ y $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{c}$ entonces

$$\text{comp}_{\bar{n}}\, \overrightarrow{P_0Q} = \frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|} = \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{|\bar{n}|}$$

$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] > 0$ entonces $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ están positivamente orientados, es decir, $\bar{a}$ y $\bar{n}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$

Ejemplo 4.85

Averiguar si el punto $Q = (2,-1,1)$ y el origen de coordenadas están a un mismo lado o en lados opuestos del plano

$$\mathscr{P}: \quad 2x - y + z = -11$$

Solución.

$P_0 = (0, 11, 0)$

En efecto, $\bar{n} = (2, -1, 1)$ y $P_0 = (0, 11, 0)$ es un punto de paso cualquiera de $\mathscr{P}$.

$$Q: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0Q} = Q - P_0 = (2, -12, 1)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (2, -1, 1) \cdot (2, -12, 1) = 4 + 12 + 1 > 0$

$\bar{n}$ y $\bar{a}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$



Q se encuentra arriba del plano $\mathscr{P}$

$$O: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0O} = O - P_0 = (0, -11, 0)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (2, -1, 1) \cdot (0, -11, 0) = 11 > 0$

$\bar{n}$ y $\bar{a}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$

O se encuentra arriba del plano $\mathscr{P}$.

Por tanto, Q y O están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$.

Ejemplo [illegible]

Averiguar si el punto $Q = (2, -1, 1)$ y el origen de coordenadas están a un mismo lado o en lados opuestos del plano

$$\mathscr{P}: \quad 2x + 3y - 6z = -2$$

Solución.

$(-2, -3, ⑥) = \bar{n}$

Q

$\mathscr{P}$

$P_0 = (-1, 0, 0)$

.O

En efecto, tomamos $\bar{n} = (-2,-3,6)$ y $P_0 = (-1,0,0)$ un punto de paso cualquiera de $\mathscr{P}$.

$$Q: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0Q} = Q - P_0 = (3,-1,1)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (-2,-3,6) \cdot (3,-1,1) = -6+3+6 > 0$
$\bar{n}$ y $\bar{a}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$
Q se encuentra arriba del plano $\mathscr{P}$



$$O: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0O} = O - P_0 = (1,0,0)$$

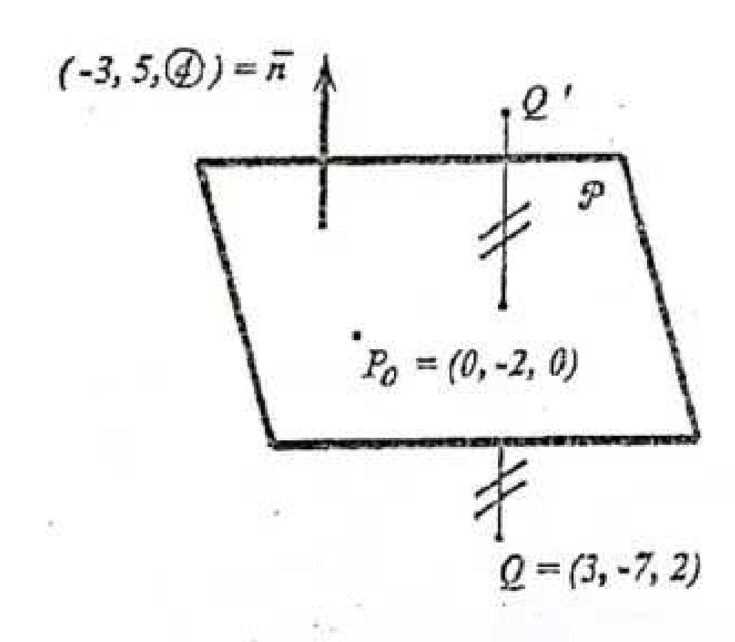
$\bar{n} \cdot \bar{a} = (-2,-3,6) \cdot (1,0,0) = -2 < 0$
$\bar{n}$ y $\bar{a}$ están en lados opuestos del plano $\mathscr{P}$
O se encuentra debajo del plano $\mathscr{P}$
Por tanto Q y O están en lados opuestos del plano $\mathscr{P}$

Ejemplo 4.87

Encontrar el punto simétrico de $Q = (3,-7,2)$ con respecto al plano

$$\mathscr{P}: \quad 3x - 5y - 4z = 10$$

Solución.



En efecto, $\bar{n} = (-3,5,4)$ y $P_0 = (0,-2,0)$ es un punto de paso de $\mathscr{P}$

$$\bar{a} = \overrightarrow{P_0 Q} = Q - P_0 = (3, -5, 2)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (-3, 5, 4) \cdot (3, -5, 2) = -9 - 25 + 8 < 0$$

entonces $\bar{n}$ y $\bar{a}$ están en lados opuestos del plano $\mathscr{P}$, Q está debajo de $\mathscr{P}$

$$d(Q, \mathscr{P}) = \left| \frac{3(3) - 5(-7) - 4(2) - 10}{\sqrt{9 + 25 + 16}} \right| = \frac{26}{5\sqrt{2}}$$

$$Q' = Q + 2(\frac{26}{5\sqrt{2}})\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$



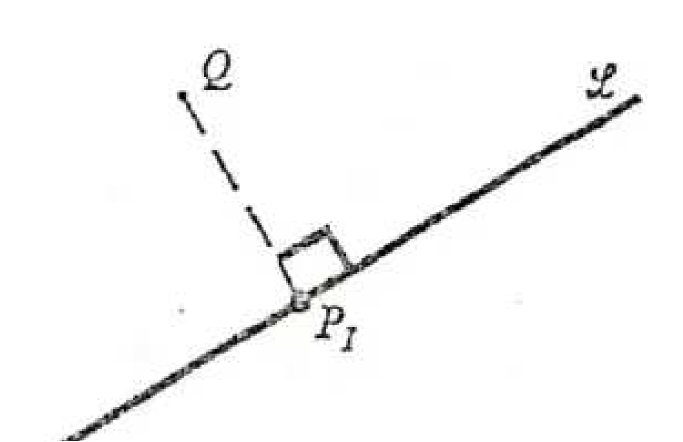
$$= (3, -7, 2) + \frac{52}{5\sqrt{2}} \frac{(-3, 5, 4)}{5\sqrt{2}}$$
$$= (3, -7, 2) + \frac{52}{50}(-3, 5, 4)$$
$$= \left(-\frac{3}{25}, -\frac{45}{25}, \frac{154}{25} \right)$$

4.2.2.6 Ejercicios resueltos

Ejercicio [illegible]

Determinar la imagen del punto $Q = (2, -1, 3)$ sobre la recta $\mathscr{L} = \{(0, -7, 2) + t(3, 5, 2)\}$

Solución.



Hallamos la ecuación del plano $\mathscr{P}$ perpendicular a $\mathscr{L}$ y que pasa por Q.

$$\mathscr{P}: \quad \vec{n} \cdot (P - Q) = 0$$
$$\mathscr{P}: \quad (3, 5, 2) \cdot (x - 2, y + 1, z - 3) = 0$$
$$\mathscr{P}: \quad 3x + 5y + 2z = 7$$

$\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = P_1$, es la imagen del punto Q sobre la recta $\mathscr{L}$.



$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P}.: \quad 3(3t) + 5(-7 + 5t) + 2(2 + 2t) = 7 \Longrightarrow t = 1$$
$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = P_1 = (3, -2, 4)$$

Ejercicio 4.4.3

Hallar el punto simétrico del punto $Q = (4, 1, 6)$ con respecto a la recta

$$\mathscr{L}: \begin{cases} x - y - 4z = -12 \\ 2x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

Solución.

Para obtener la ecuación de la recta $\mathscr{L}$

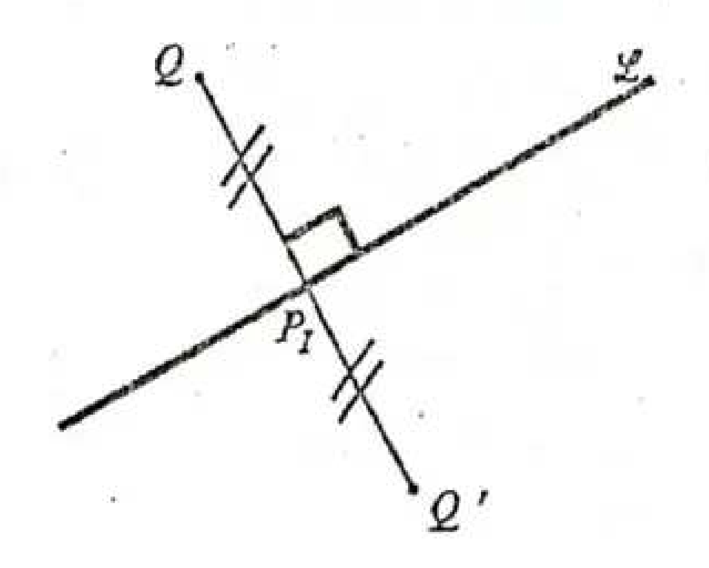
$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$
$$\mathscr{L} = \{(-5, 7, 0) + k(2, -2, 1)\}$$

Necesitamos la ecuación del plano $\mathscr{P}$ ortogonal a $\mathscr{L}$ y que pasa por Q.

$$\mathscr{P}: \quad \vec{n} \cdot (P - Q) = 0, \qquad \vec{n} = (2, -2, 1)$$
$$\mathscr{P}: \quad 2x - 2y + z = 12$$

Como en el ejercicio anterior $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = P_1$

Como en el ejercicio anterior $\mathscr{P} \cap \mathscr{L} = P_1$







$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P} : 2(-5+2k) - 2(7-2k) + k = 12 \Longrightarrow k = 4$$

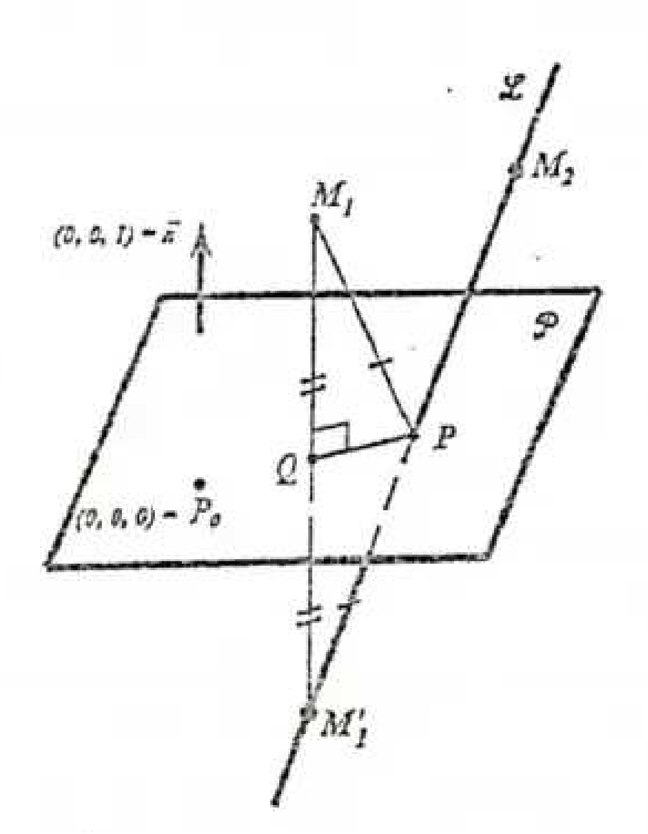
$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P} = P_1 = (3, -1, 4)$$

$$P_1 = \frac{Q + Q'}{2} \Longrightarrow Q' = 2P_1 - Q = (2, -3, 2)$$



Hallar en el plano OXY un punto P de modo que $d(P, M_1) + d(P, M_2)$ sea mínima cuando $M_1 = (-1, 2, 5)$ y $M_2 = (11, -16, 10)$

Solución.



El plano OXY es

$$\mathscr{P}: \quad z = 0$$

entonces $\bar{n} = (0,0,1)$, $P_0 = (0,0,0)$ punto de paso de $\mathscr{P}$.
Necesitamos saber dónde se encuentran los puntos M_1 y M_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$

$$\bar{a} = \overrightarrow{P_0M_1} = (-1,2,5)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (0,0,1) \cdot (-1,2,5) > 0$$



entonces $\bar{a}$ y $\bar{n}$ están a un mismo lado del plano, es decir M_1 está encima del plano $\mathscr{P}$.
De modo similar

$$\bar{a} = \overrightarrow{P_0M_2} = (11,-16,10)$$

y

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (0,0,1) \cdot (11,-16,10) = 10 > 0$$

entonces $\bar{a}$ y $\bar{n}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$, es decir M_2 está también encima del plano $\mathscr{P}$.
Debemos encontrar un punto $P \in \mathscr{P}$ tal que $d(P,M_1) + d(P,M_2)$ sea mínima.
Partimos encontrando el simétrico de cualquiera de los puntos M_1 o M_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$. Si elegimos M_1 entonces M_1' es el simétrico de M_1 con respecto al plano $\mathscr{P}$, luego la recta $\mathscr{L}$ que pasa por M_1' y M_2 interseca al plano $\mathscr{P}$ en P, queda claro que $d(P,M_1') + d(P,M_2)$ es mínima (puesto que P está sobre la recta que contiene a los puntos M_1' y M_2).
En la figura se observa que el triángulo M_1PM_1' es isósceles puesto que Q es punto medio de M_1 y M_1' y $\overline{QP} \perp \overline{M_1M_1'}$ entonces $M_1P = M_1'P$, luego $d(P,M_1) + d(P,M_2)$ es mínima.
Efectuando operaciones

$$d(M_1,\mathscr{P}) = \left|\frac{5}{1}\right| = 5$$

entonces

$$\begin{aligned} M_1' &= M_1 - 2(5)(0,0,1) \\ &= (-1,2,5) - (0,0,10) \\ &= (-1,2,-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1'M_2} &= M_2 - M_1' \\ &= (11,-16,10) - (-1,2,-5) \\ &= (12,-18,15) \end{aligned}$$



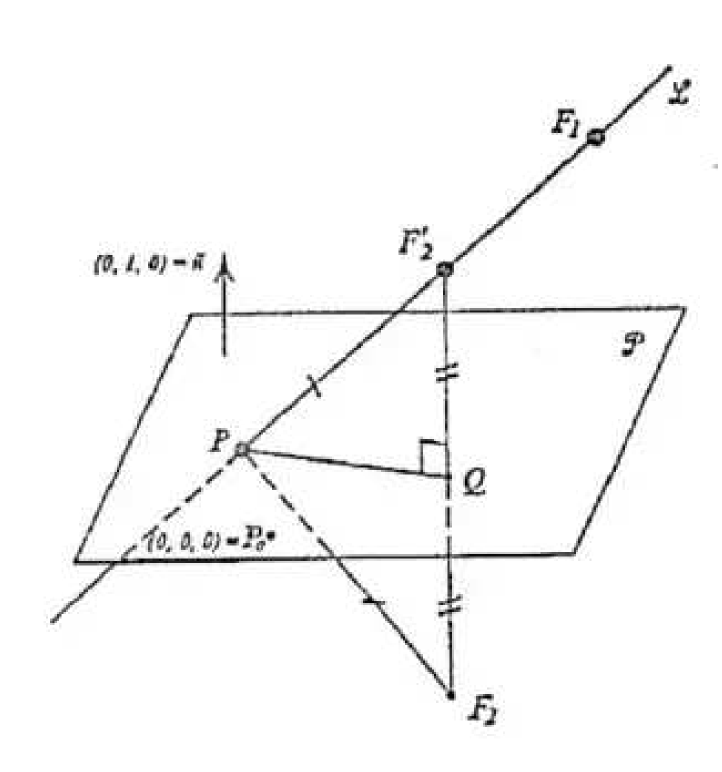
$$\mathscr{L}_{M_1'M_2} = \{(-1,2,5) + k(4,-6,5)\} \qquad \mathscr{P} : z = 0 \Longrightarrow k = 1$$

$$\mathscr{L}_{M_1'M_2} \cap \mathscr{P} = P = (3,-4,0)$$

Ejercicio 4.25

Hallar en el plano OXZ un punto P de modo que $|d(P,F_1) - d(P,F_2)|$ sea máxima, cuando $F_1 = (3,2,-5)$ y $F_2 = (8,-4,-13)$

Solución.



El plano OXZ es $\mathscr{P}$: $y = 0$ entonces $\bar{n} = (0,1,0)$, $P_0 = (0,0,0)$ es el punto de paso de $\mathscr{P}$.

Necesitamos ubicar los puntos F_1 y F_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$.

Necesitamos ubicar los puntos F_1 y F_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$.

$$\bar{a} = \overrightarrow{P_0F_1} = (3, 2, -5)$$

$$\bar{n} \cdot \bar{a} = (0, 1, 0) \cdot (3, 2, -5) = 2 > 0$$

entonces $\bar{n}$ y $\bar{a}$ están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$ es decir F_1 está encima del plano.

De manera similar

$$\bar{a} = \overrightarrow{P_0F_2} = (8, -4, -13)$$

$$(0, 1, 0) \cdot (8, -4, -13) = -4 < 0$$



entonces $\bar{n}$ y $\bar{a}$ están en lados opuestos del plano $\mathscr{P}$, es decir, F_2 está debajo del plano $\mathscr{P}$. Debemos encontrar un punto $P \in \mathscr{P}$ tal que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$ sea máxima.

Partimos encontrando el simétrico de cualquiera de los puntos F_1 o F_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$. Si elegimos F_2, entonces F_2' es el simétrico de F_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$, la recta $\mathscr{L}$ que pasa por F_2' y F_1, interseca al plano $\mathscr{P}$ en P y $|d(P, F_1) - d(P, F_2')|$ es máxima.

En la figura se observa que el triángulo F_2PF_2' es isósceles puesto que Q es punto medio de F_2 y F_2' y $\overline{QP} \perp \overline{F_2F_2'}$ entonces $PF_2 = PF_2'$, luego $|d(P, F_1) - d(P, F_2)|$ es máxima.

Efectuando operaciones

$$d(F_2, \mathscr{P}) = |\frac{4}{1}| = 4$$

entonces

$$F_2' = F_2 + 2(4)(0, 1, 0) = (8, -4, -13) + (0, 8, 0) = (8, 4, -13)$$

$$\overrightarrow{F_2'F_1} = F_1 - F_2' = (3, 2, -5) - (8, 4, -13) = (-5, -2, 8)$$

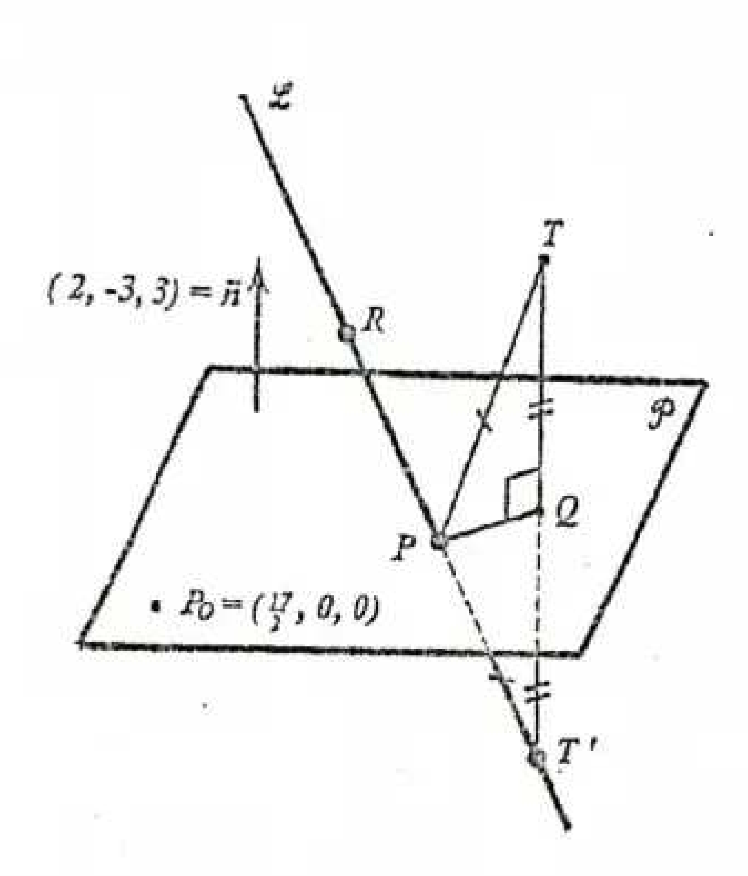
$$\mathscr{L}_{F_2'F_1} = \{(8,4,-13) + r(5,2,-8)\} \qquad \mathscr{P}: \quad y = 0 \Longrightarrow r = -2$$

$$\mathscr{L}_{F_2'F_1} \cap \mathscr{P} = P = (-2,0,3)$$

Ejercicio 4.46

Hallar en el plano $\mathscr{P}$: $\quad 2x - 3y + 3z = 17$ un punto P de modo que $d(P,R) + d(P,T)$ sea mínima, cuando $R = (3,-4,7)$ y $T = (-5,-14,17)$

Solución.



$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (2,-3,2) \qquad P_0 = (\frac{17}{2},0,0)$$

punto de paso de $\mathscr{P}$.

Primero ubicamos los puntos R y T con respecto al plano $\mathscr{P}$

$$R: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0R} = (3 - \frac{17}{2},-4,7) = (-\frac{11}{2},-4,7)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (2,-3,3) \cdot (-\frac{11}{2},-4,7) = -11 + 12 + 21 > 0$

R está encima del plano $\mathscr{P}$

$$T: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0T} = (-5 - \frac{17}{2}, -14, 17) = (-\frac{27}{2}, -14, 17)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (2, -3, 3) \cdot (-\frac{27}{2}, -14, 17) = -27 + 42 + 51 > 0$

T está encima del plano $\mathscr{P}$

Elegimos T y calculamos el simétrico T' de T con respecto al plano $\mathscr{P}$

$$d(T, \mathscr{P}) = \left| \frac{2(-5) - 3(-14) + 3(17) - 17}{\sqrt{4+9+9}} \right| = \frac{66}{\sqrt{22}} = 3\sqrt{22}$$

$$T' = T - 2(3\sqrt{22}) \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$



$$= (-5, -14, 17) - 6\sqrt{22} \frac{(2, -3, 3)}{\sqrt{22}}$$
$$= (-17, 4, -1)$$

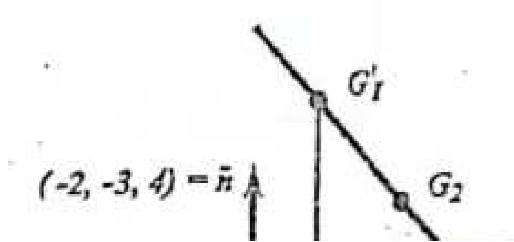
$$\overrightarrow{RT'} = T' - R$$
$$= (-17, 4, -1) - (3, -4, 7)$$
$$= (-20, 8, -8) \parallel (5, -2, 2)$$

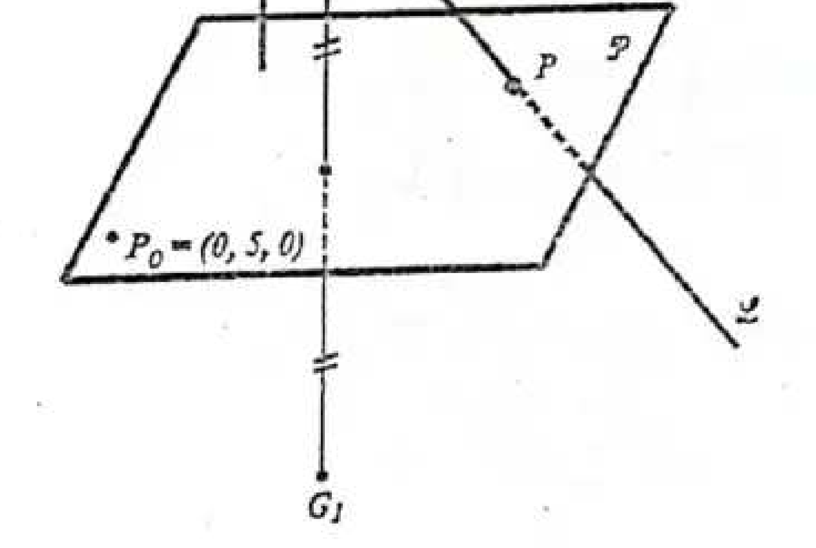
$$P = \mathscr{L}_{RT'} \cap \mathscr{P}: \quad 2(3 + 5k) - 3(-4 - 2k) + 3(7 + 2k) = 17 \Longrightarrow k = -1$$
$$P = (-2, -2, 5)$$

Ejercicio 4.47

Hallar en el plano $\mathscr{P}: \quad 2x + 3y - 4z = 15$ un punto P de modo que $|d(P, G_1) - d(P, G_2)|$ sea máxima cuando $G_1 = (5, 2, -7)$ y $G_2 = (7, -25, 10)$.

Solución.





$\mathscr{P}: \quad \bar{n} = (-2,-3,4)$ y $P_0 = (0,5,0)$ punto de paso de $\mathscr{P}$.

Ubicamos los puntos G_1 y G_2 con respecto al plano $\mathscr{P}$.

$$G_1: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0G_1} = G_1 - P_0 = (5,-3,-7)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (-2,-3,4) \cdot (5,-3,-7) = -10 + 9 - 28 < 0$

G_1 está debajo del plano $\mathscr{P}$

$$G_2: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_0G_2} = G_2 - P_0 = (7,-30,10)$$

$\bar{n} \cdot \bar{a} = (-2,-3,4) \cdot (7,-30,10) = -14 + 90 + 40 > 0$

G_2 está encima del plano $\mathscr{P}$.

Elegimos G_1 y calculamos el simétrico G_1' de G_1 con respecto al plano $\mathscr{P}$

$$d(G_1, \mathscr{P}) = \left|\frac{2(5) + 3(2) - 4(-7) - 15}{\sqrt{4+9+16}}\right| = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}$$

$$G_1' = G_1 + 2(\sqrt{29})\frac{\bar{n}}{|\bar{n}|} = (5,2,-7) + 2(-2,-3,4) = (1,-4,1)$$

$$\overrightarrow{G_1'G_2} = G_2 - G_1' = (7,-25,10) - (1,-4,1) = (6,-21,9) \parallel (2,-7,3)$$

$$\mathscr{L}_{G_1'G_2} = \{(7,-25,10) + r(2,-7,3)\}$$

$\mathscr{L}_{G_1'G_2} \cap \mathscr{P}: \quad 2(7+2r) + 3(-25-7r) - 4(10+3r) = 15 \Longrightarrow r = -4$

$$\mathscr{L}_{G_1'G_2} \cap \mathscr{P} = P = (7-8, -25+28, 10-12) = (-1, 3, -2)$$

Ejercicio 48

Averiguar si los puntos $M = (2, -1, 1)$ y $N = (1, 2, -3)$ están en un mismo ángulo diedro, en ángulos diedros adyacentes o en ángulos diedros opuestos formados por la intersección de los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 3x - y + 2z = 3$$



$$\mathscr{P}_2 : \quad x - 2y - z = -4$$

Solución.
En efecto

$$\bar{n}_1 = (3, -1, 2) \text{ y } \bar{n}_2 = (-1, 2, 1)$$

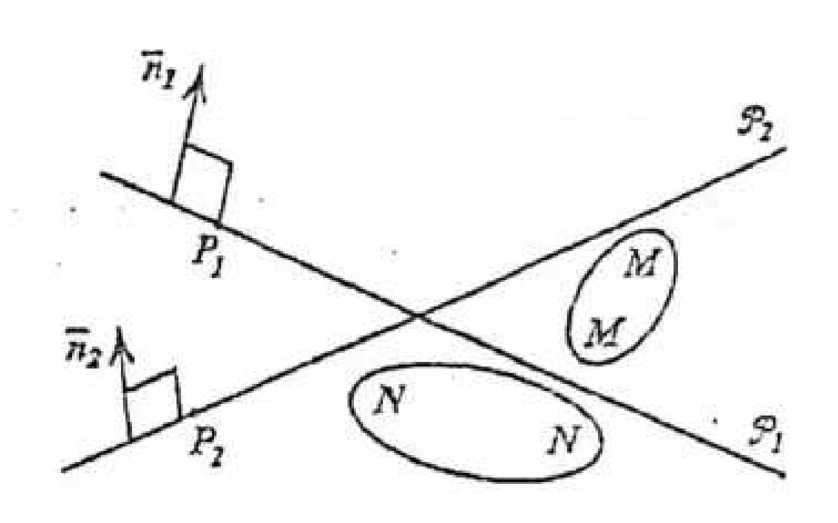
$$\bar{n}_1 \not\parallel \bar{n}_2, \mathscr{P}_1 \not\parallel \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$$

los puntos $P_1 = (1, 0, 0)$ y $P_2 = (-4, 0, 0)$ son puntos de paso de $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ respectivamente.
Necesitamos ubicar M y N con respecto a ambos planos.

$$\mathscr{P}_1 : \begin{cases} M : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1M} = (1, -1, 1) \Longrightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (3, -1, 2) \cdot (1, -1, 1) > 0 \\ \qquad M \text{ arriba de } \mathscr{P}_1 \\ N : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1N} = (0, 2, -3) \Longrightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (3, -1, 2) \cdot (0, 2, -3) < 0 \\ \qquad N \text{ debajo de } \mathscr{P}_1 \end{cases}$$

$$\mathscr{P}_2 : \begin{cases} M : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2M} = (6, -1, 1) \Longrightarrow \bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (-1, 2, 1) \cdot (6, -1, 1) < 0 \\ \qquad M \text{ debajo de } \mathscr{P}_2 \\ N : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2N} = (5, 2, -3) \Longrightarrow \bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (-1, 2, 1) \cdot (5, 2, -3) < 0 \\ \qquad N \text{ debajo de } \mathscr{P}_2 \end{cases}$$

Colocando los puntos M y N en la figura de acuerdo a los resultados obtenidos, tenemos que M y N están en ángulos adyacentes





Ejercicio 4.49

Averiguar si el punto $M = (2, -1, 3)$ el origen O de coordenadas están en un mismo ángulo diedro, en ángulos diedros opuestos, o en ángulos diedros adyacentes formados por la intersección de los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x + 3y - 5z = 15$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 5x - y - 3z = 7$$

Solución.
Veamos

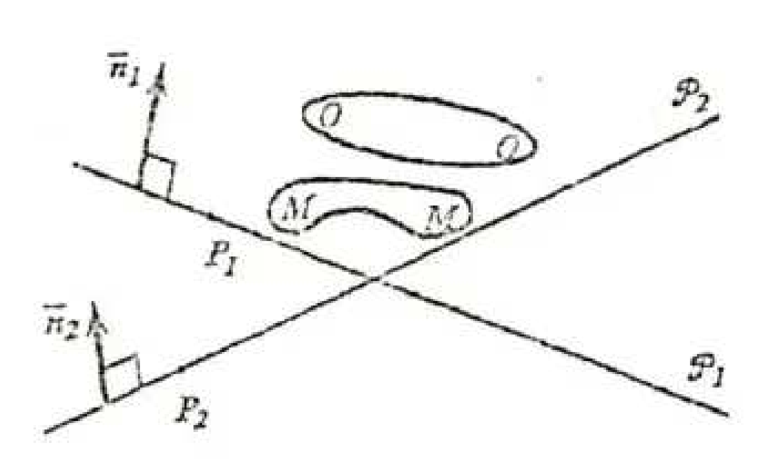
$$\bar{n}_1 = (-2, -3, 5), \qquad \bar{n}_2 = (-5, 1, 3)$$
$$\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$$
$$\mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2$$
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$$

de $P_1 = (0, 5, 0)$ y $P_2 = (0, -7, 0)$ puntos de paso de $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ respectivamente. Necesitamos la ubicación de los puntos M y O con respecto a ambos planos.

$$\mathscr{P}_1 : \begin{cases} M : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1 M} = (2, -6, 3) \Longrightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (-2, -3, 5) \cdot (2, -6, 3) > 0 \\ \qquad M \text{ arriba de } \mathscr{P}_1 \\ O : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1 O} = (0, -5, 0) \Longrightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (-2, -3, 5) \cdot (0, -5, 0) > 0 \\ \qquad O \text{ arriba de } \mathscr{P}_1 \end{cases}$$

$$\mathscr{P}_2 : \begin{cases} M: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2M} = (2,6,3) \Longrightarrow \bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (-5,1,3)\cdot(2,6,3) > 0 \\ \qquad M \text{ arriba de } \mathscr{P}_2 \\ O: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2O} = (0,7,0) \Longrightarrow \bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (-5,1,3)\cdot(0,7,0) > 0 \\ \qquad O \text{ arriba de } \mathscr{P}_2 \end{cases}$$

Ubicando los puntos M y O en la figura, de acuerdo a los resultados obtenidos, tenemos que M y O están en el mismo ángulo diedro.



[illegible]

Averiguar si el punto $M = (2,-1,3)$ y el origen de coordenadas están en un mismo ángulo diedro, en ángulos diedros opuestos o en ángulos diedros adyacentes formados por la intersección de los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad x + 5y - z = -1$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 2x + 17y + z = -2$$

Solución.
En efecto

$$\bar{n}_1 = (-1,-5,1), \qquad \bar{n}_2 = (2,17,1)$$
$$\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$$
$$\mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2$$

$$\mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2$$

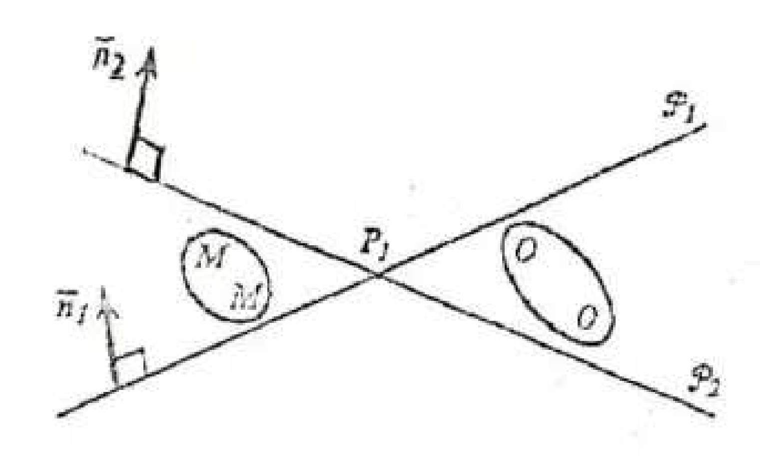
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}$$

Tomamos $P_1 = (-1, 0, 0) = P_2$ punto de paso de $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$

$$\mathscr{P}_1 : \begin{cases} M: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1 M} = (3, -1, 3) \Longrightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (-1, -5, 1) \cdot (3, -1, 3) > 0 \\ \qquad M \text{ arriba de } \mathscr{P}_1 \\ O: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1 O} = (1, 0, 0) \Longrightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (-1, 5, 1) \cdot (1, 0, 0) < 0 \\ \qquad O \text{ debajo de } \mathscr{P}_1 \end{cases}$$

$$\mathscr{P}_2 : \begin{cases} M: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2 M} = (3, -1, 3) \Longrightarrow \bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (2, 17, 1) \cdot (3, -1, 3) < 0 \\ \qquad M \text{ debajo de } \mathscr{P}_2 \\ O: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2 O} = (1, 0, 0) \Longrightarrow \bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (2, 17, 1) \cdot (1, 0, 0) > 0 \\ \qquad O \text{ arriba de } \mathscr{P}_2 \end{cases}$$

Trasladando estos resultados en la figura, tenemos que M y O están en ángulos diedros opuestos



Ejercicio 45

Averiguar si el origen de coordenadas está situado en el ángulo agudo u obtuso formado por los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad x - 2y + 3z = 5$$

$$\mathscr{P}_2 : \quad 2x - y - z = -3$$

Solución.

En efecto

$$\bar{n}_1 = (1, -2, 3), \qquad \bar{n}_2 = (-2, 1, 1)$$

tomemos $P_1 = (5, 0, 0)$ y $P_2 = (0, 3, 0)$ puntos de paso de $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ respectivamente

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1 O} = (-5, 0, 0)$$

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (1, -2, 3) \cdot (-5, 0, 0) = -5 < 0$$

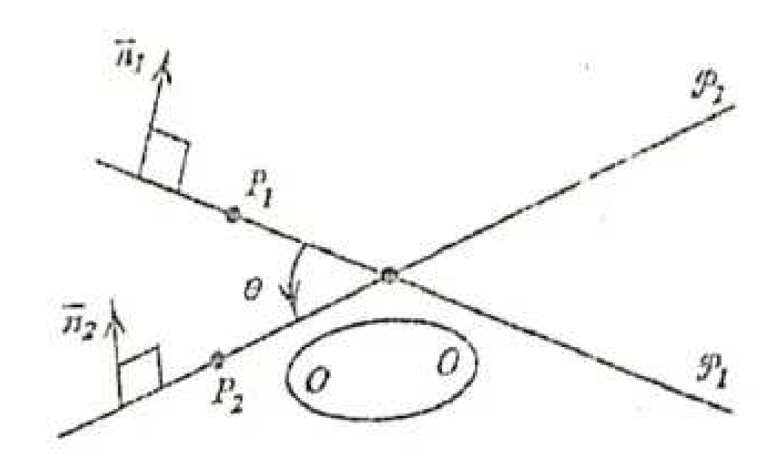
(O debajo de $\mathscr{P}_1$)



$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2 O} = (0, -3, 0)$$

$$\bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (-2, 1, 1) \cdot (0, -3, 0) = -3 < 0$$

(O debajo de $\mathscr{P}_2$)



$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{(1, -2, 3) \cdot (-2, 1, 1)}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{-1}{2\sqrt{21}} < 0$$

entonces θ es obtuso.

O se encuentra dentro del ángulo agudo.



Averiguar si el punto $M = (3, 2, -1)$ está situado en el ángulo agudo u obtuso formado por los planos

formado por los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad 5x - y + z = -3$$

$$\mathscr{P}_2: \quad 4x - 3y + 2z = -5$$

Solución.
Veamos

$$\bar{n}_1 = (5, -1, 1), \qquad \bar{n}_2 = (4, -3, 2)$$

tomemos $P_1 = (0, 3, 0)$ y $P_2 = (-\frac{5}{4}, 0, 0)$ puntos de paso de $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ respectivamente

$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_1 M} = (3, -1, -1)$$



entonces

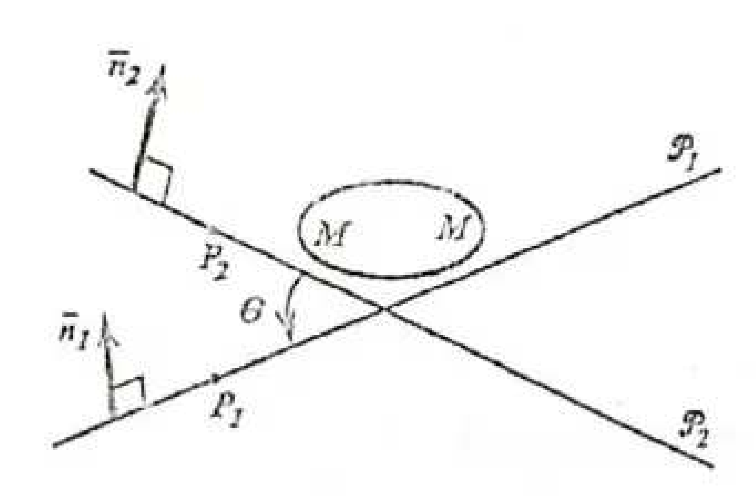
$$\bar{n}_1 \cdot \bar{a} = (5, -1, 1) \cdot (3, -1, -1) = 15 + 1 - 1 > 0$$

(M arriba de $\mathscr{P}_1$)

$$\mathscr{P}_2: \quad \bar{a} = \overrightarrow{P_2 M} = (3 + \frac{5}{4}, 2, -1)$$

$$\bar{n}_2 \cdot \bar{a} = (4, -3, 2) \cdot (\frac{17}{4}, 2, -1) = 17 - 6 - 2 > 0$$

(M arriba de $\mathscr{P}_2$)



$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{(5, -1, 1) \cdot (4, -3, 2)}{\sqrt{27}\sqrt{29}} = \frac{25}{\sqrt{27}\sqrt{29}} > 0$$

entonces θ es agudo.

M se encuentra dentro del ángulo obtuso.

4.2.2.7 Ejercicios propuestos

1) Averiguar si el punto $Q = (2, -1, 1)$ y el origen de coordenadas están a un mismo lado o en lados opuestos de cada uno de los siguientes planos

(a) $5x - 3y + z - 18 = 0$

Rpta: a un lado



(b) $2x + 7y + 3z + 1 = 0$

(c) $x + 5y + 12z - 1 = 0$

Rpta: en lados opuestos

(d) $x - y - z - 8 = 0$

(e) $x + 3y - 7z + 6 = 0$

Rpta: en lados opuestos

(f) $3x - 2y + 2z - 7 = 0$

2) Hallar sobre el eje Y un punto que esté a la distancia de 4 u del plano $x + 2y - 2z - 2 = 0$

3) Hallar en el eje Z un punto equidistante del punto $M = (1, -2, 0)$ y del plano $3x - 2y + 6z - 9 = 0$

Rpta: $(0, 0, -2)$, $(0, 0, -64/13)$

4) Hallar en el eje X un punto equidistante de los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 12x - 16y + 14z + 1 = 0$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 2x + 2y - z - 1 = 0$$

5) Averiguar si el punto $M = (2, -1, 3)$ y el origen de coordenadas están en un mismo ángulo diedro, en ángulos diedros adyacentes o en ángulos diedros opuestos formados por la intersección de los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad 2x - y + 3z = 5$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 3x + 2y - z = -3$$

Rpta: M y O están en ángulos adyacentes

6) Averiguar si los puntos $M = (2, -1, 1)$ y $N = (1, 2, -3)$ están en el mismo ángulo diedro, o en ángulos diedros opuestos o en ángulos diedros adyacentes formados por los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad 2x - y + 5z = 1$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 3x - 2y + 6z = 1$$



7) Encontrar sobre el plano $\mathscr{P}: \quad x + 2y + 7z = 10$ un punto P de modo que $|d(P, A) - d(P, B)|$ sea máxima, cuando $A = (4, 6, -12)$ y $B = (5, 8, -1)$

Rpta: $P = (\frac{1631}{333}, \frac{2596}{333}, -\frac{492}{333})$

8) Encontrar sobre el plano $\mathscr{P}: \quad 3x - 2y - 5z = 8$ un punto P de modo que la suma $d(P, A) + d(P, B)$ sea mínima donde $A = (2, -1, 1)$ y $B = (3, 3, 2)$.

4.2.2.8 Intersección de tres planos

Consideremos los siguientes tres planos

$$\mathscr{P}_1: \quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$\mathscr{P}_2: \quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$\mathscr{P}_3: \quad a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La posición relativa de estos planos está determinada por el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada del sistema que están sujetos a ciertas restricciones

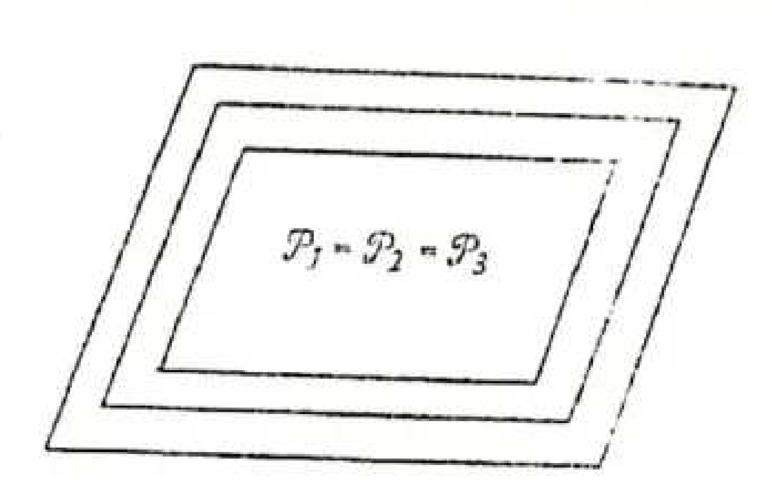
$$1 \leq r(A) \leq 3$$
$$1 \leq r(A|B) \leq 3$$

por lo que las posibilidades de estudio son las siguientes:

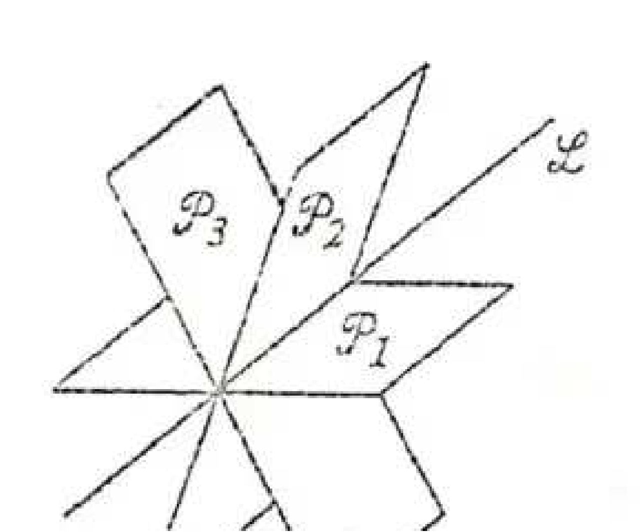
1) Sistema consistente. Cuando el $r(A) = r(A|B)$ se tiene

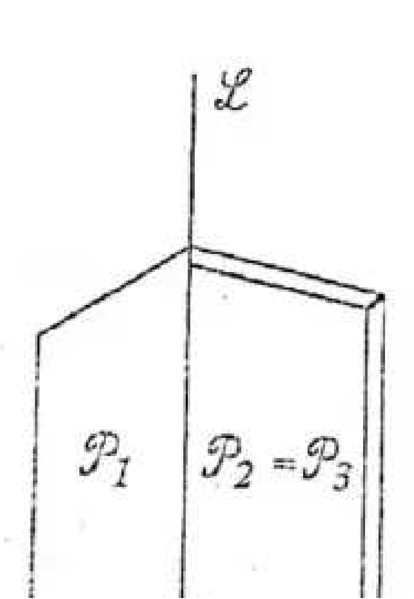
(a) $r(A) = r(A|B) = 1 < n$ entonces existen $n - 1 = 2$ incógnitas arbitrarias significa que los tres planos se intersecan en un plano; por lo tanto, se deduce que los tres planos coinciden $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}_2 = \mathscr{P}_3$ como se muestra en la figura

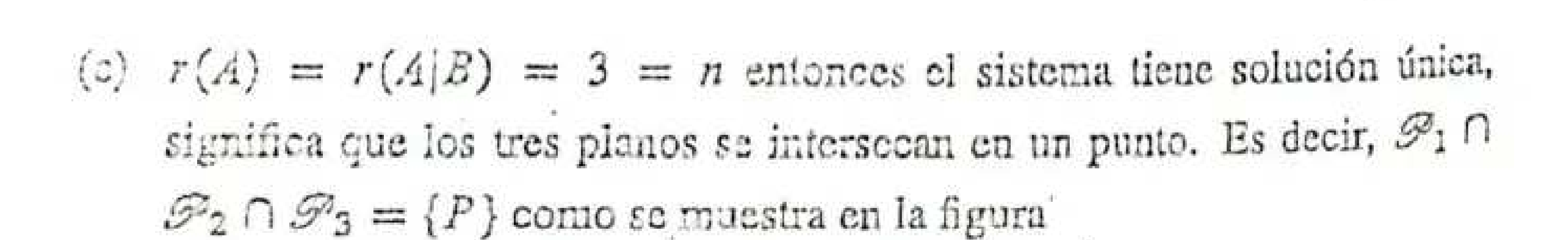




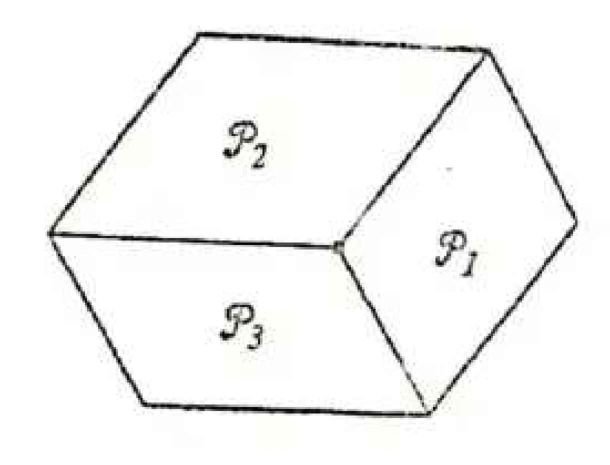
(b) $r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria significa que los tres planos se intersecan en una recta. Es decir, $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \mathscr{L}$ como se muestra en la figura

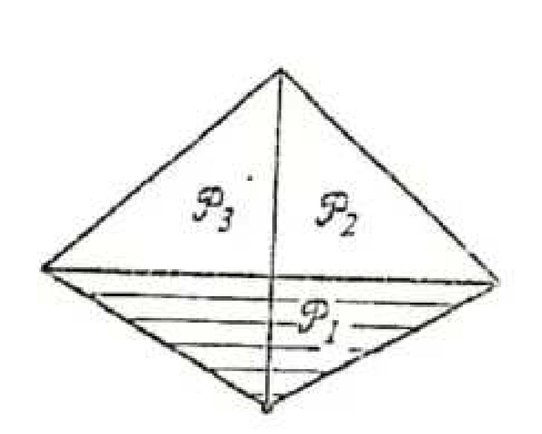






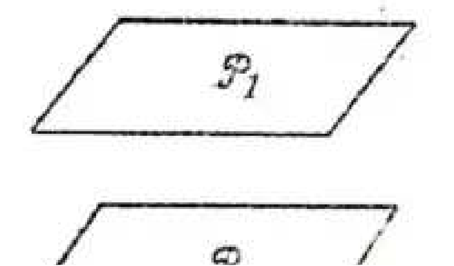
(c) $r(A) = r(A|B) = 3 = n$ entonces el sistema tiene solución única, significa que los tres planos se intersecan en un punto. Es decir, $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \{P\}$ como se muestra en la figura

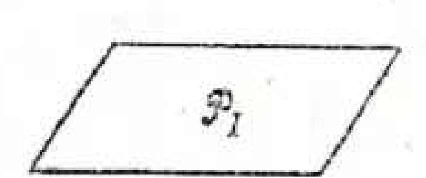


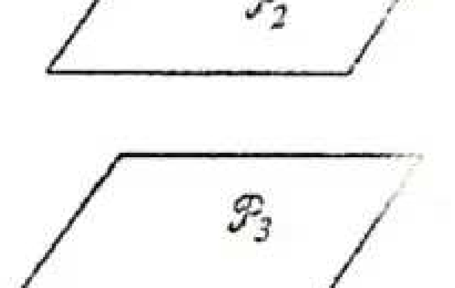


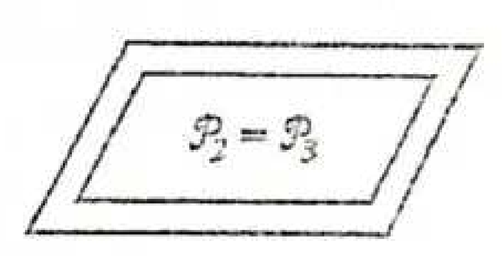
2) **Sistema inconsistente.** Cuando $r(A) \neq r(A|B)$

(d) $r(A) = 1$ y $r(A|B) = 2$ significa que la intersección de los tres planos es vacía. Es decir $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$ y los tres planos son paralelos.

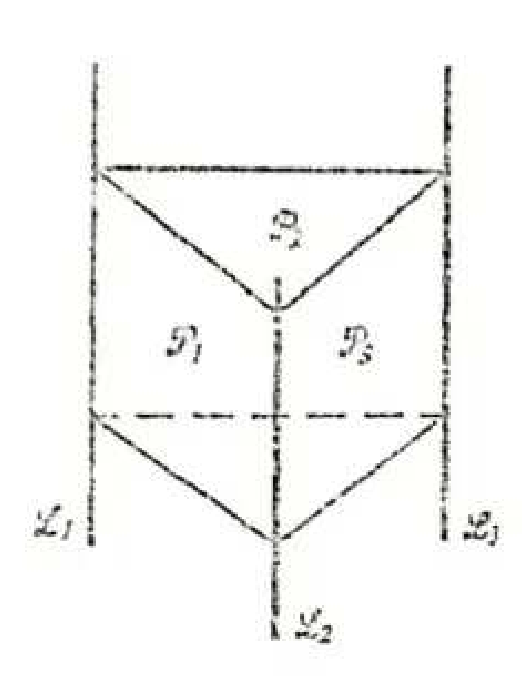


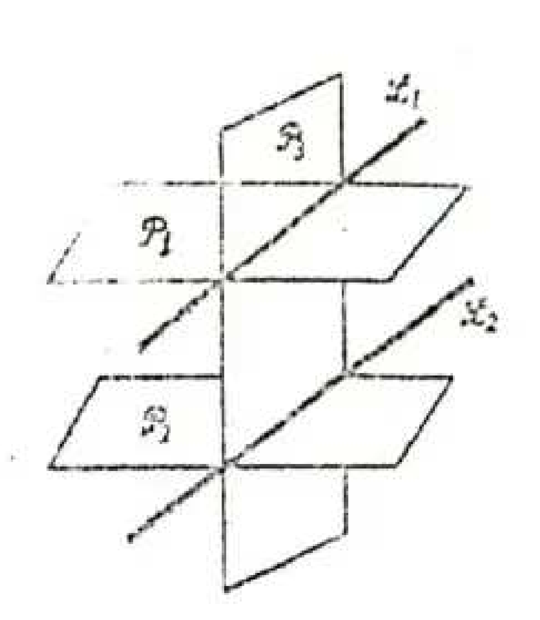






(c) $r(A) = 2$ y $r(A|B) = 3$ significa que la intersección de los tres planos es vacía. Es decir $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$ y los tres planos no son paralelos, forman un prisma triangular o se intersecan 2 a 2.





Tres planos cuyas normales son L.I. se intersecan en un y solo un punto, puesto que el punto de intersección de los planos corresponde a la solución única del sistema de ecuaciones de tres planos.



Determinar la intersección de los siguientes planos

$$\mathscr{P}_1: \quad x - 2y + z = 7$$

$$\mathscr{P}_2: \quad 2x + y - z = -2$$

$$\mathscr{P}_3: \quad x - 3y + 2z = 11$$

Solución.

Se tiene el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$



$r(A) = r(A|B) = 3 = n$ entonces el sistema tiene solución única

$$z = 2$$
$$y = z - 4 = -2$$
$$x = 2y - z + 7 = -4 - 2 + 7 = 1$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = P = (1, -2, 2)$$

Otro método (usando el método de Cramer)

$$[\bar{n}_1\ \bar{n}_2\ \bar{n}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-1) + 2(5) + (-7) = 2 \neq 0$$

$$\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3\} \text{ es L.I.} \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \{P\}$$

Usando la regla de Cramer

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 11 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 11 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 11 \end{vmatrix} = 4$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \; y = \frac{|A_2|}{|A|} = -2, \; z = \frac{|A_3|}{|A|} = 2$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = P = (1, -2, 2)$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = P = (1,-2,2)$$



El primer método de eliminación de Gauss es más directo.

Ejemplo 4.89

Determinar la intersección de los siguientes planos

$$\mathscr{P}_1: \quad x + y - 8z = -6$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 2x + 3y + 4z = 9$$
$$\mathscr{P}_3: \quad 5x + 6y - 20z = -9$$



Solución.

El sistema de ecuaciones lineales $AX = B$, tiene 3 incógnitas, entonces $n = 3$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 5 & 6 & -20 & -9 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 20 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{28t - 27, -20t + 21, t\} \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$\mathscr{L} = \{(-27, 21, 0) + t(28, -20, 1)/t \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \mathscr{L}$$

(una recta)

[illegible]

Determinar la intersección de los siguientes planos

$$\mathscr{P}_1: \quad 2x - y + 3z = 5$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 3x + y + 2z = 1$$

$\mathscr{P}_3 : 4x + 3y + z = -2$

Solución.

El problema se reduce a resolver el SEL $AX = B$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2$, $r(A|B) = 3$ el sistema es incompatible, no tiene solución, es decir $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$. Los planos se intersecan 2 a 2. Veamos

1)

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_1 : \quad 2x - y + 3z = 5 \\ \mathscr{P}_2 : \quad 3x + y + 2z = 1 \end{array}\right\} AX = B$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-13}{5} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = r$$

$$y = z - \frac{13}{5} = r - \frac{13}{5}$$

$$x = -2y + z - 4 = -r + \frac{6}{5}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(\frac{6}{5}, -\frac{13}{5}, 0) + r(-1, 1, 1) / r \in \mathbb{R}\}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{P}_1 : \quad 2x - y + 3z = 5 \\ \mathscr{P}_2 : \quad 4x + 3y + z = -2 \end{array}\right\} AX = B$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 & -12/5 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n-2 = 1$ incógnita arbitraria

$$z = k$$

$$y = z - \frac{12}{5} = k - \frac{12}{5}$$

$$x = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = -k + \frac{13}{10}$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(\frac{13}{10}, -\frac{12}{5}, 0) + k(-1, 1, 1)/k \in \mathbb{R}\}.$$

3)

$$\left.\begin{array}{ll} \mathscr{P}_1: & 3x + y + 2z = 1 \\ \mathscr{P}_2: & 4x + 3y + z = -2 \end{array}\right\} AX = B$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n-2 = 1$ incógnita arbitraria.

$$z = m$$

$$y = z - 2 = m - 2$$

$$x = -2y + z - 3 = -m + 1$$

$$\mathscr{L}_3 = \{(1, -2, 0) + m(-1, 1, 1)/m \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto, la intersección de los planos dos a dos son tres rectas paralelas diferentes, significa que los tres planos constituyen las caras laterales de un prisma

cuyas aristas son $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$



Determinar para qué valores de a y b los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x - y + 3z = 1$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad x + 2y - z = -b$$
$$\mathscr{P}_3 : \quad x + ay - 6z = -10$$

1) tienen un punto común

2) pasan por una recta



3) se cortan en tres rectas paralelas diferentes

Solución.
Se tiene un SEL $AX = B$ con $n = 3$ incógnitas

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & a & -6 \end{vmatrix} = 5(a-7) \neq 0$$

entonces $a \neq 7$.

1) Luego si $a \neq 7$ la solución del sistema es única

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -b \\ 1 & a & -b & -10 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1+b \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1-2b}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a+2ab+b-52}{5(a-7)} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$$z = \frac{a + 2ab + b - 52}{5(a-7)}$$
$$y = z - \frac{(1+2b)}{5} = \frac{3(b-3)}{a-7}$$
$$x = 3y - 4z + 1 + b = \frac{a - 3ab + 6b + 38}{5(a-7)}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = P = \left(\frac{a - 3ab + 6b + 38}{5(a-7)}, \frac{3(b-3)}{a-7}, \frac{a + 2ab + b - 52}{5(a-7)}\right)$$

si $a \neq 7$, $\forall b \in \mathbb{R}$

Encontramos que

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1+b \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1-2b}{5} \\ 0 & 0 & a-7 & \frac{a+2ab+b-52}{5} \end{array}\right) \qquad (4.71)$$

En (4.71) si $a = 7$, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1+b \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1-2b}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 3(b-3) \end{array}\right) \qquad (4.72)$$

2) Si $a = 7$ y $b = 3$, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A|B) = r(E_A|E_B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{-t - \frac{1}{5}, t - \frac{7}{5}, t\} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L} = \{(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, 0) + t(-1, 1, 1)\}$$

3) Si $a = 7$ y $b \neq 3$, entonces en (4.72)

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 1+b \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-1-2b}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2$ y $r(A|B) = 3$, entonces el sistema es incompatible. Significa que

$r(A) = 2$ y $r(A|B) = 3$, entonces

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$

[illegible]

Estudiar las posiciones relativas de los tres planos dados en función de los valores que tomen los parámetros a y $b \in \mathbb{R}$ donde

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_1 &: \quad x - y + 3z = 1 \\ \mathscr{P}_2 &: \quad 3x - 5y + 7z = -b \\ \mathscr{P}_3 &: \quad x - 3y + az = 2 \end{aligned}$$



Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 2(1-a) \neq 0$$

entonces $a \neq 1$

1) Si $a \neq 1$ el sistema de ecuaciones tiene solución única

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -b \\ 1 & -3 & a & 2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+4}{a-1} \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{b+4}{a-1} \\ y &= -z + \frac{b+3}{2} = \frac{3a - 3b + ab - 11}{2(a-1)} \\ x &= y - 3z + 1 = \frac{5a + 9b + ab - 37}{2(a-1)} \end{aligned}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = P = \left(\frac{5a + 9b + ab - 37}{2(a-1)}, \frac{3a - 3b + ab - 11}{2(a-1)}, \frac{b+4}{a-1}\right)$$

si $a \neq 1, \; \forall b \in \mathbb{R}$

Encontramos que

$$(A|B) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+3}{2} \\ 0 & 0 & a-1 & b+4 \end{array}\right) \qquad (4.73)$$

En (4.73), si $a = 1$ y $b = -4$, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$



$r(A) = r(A|B) = 2 < n$ entonces existe $n - 2 = 1$ incógnita arbitraria

$$S = \{-4r + \frac{1}{2}, -r - \frac{1}{2}, r\} \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

$$\mathscr{L} = \{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) + r(-4, -1, 1)/r \in \mathbb{R}\}$$

2) En (4.73) Si $a = 1$ y $b = -4$, entonces

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b+3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (E_A|E_B)$$

$r(A) = 2, \; r(A|B) = 3$ el sistema es inconsistente, significa que

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$

4.2.2.9 Ejercicios diversos



Las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(-13, 3, 4) + t(7, -2, -1)\}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(-13,3,4) + t(7,-2,-1)\}$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(-8,9,-3) + r(4,-3,1)\}$$

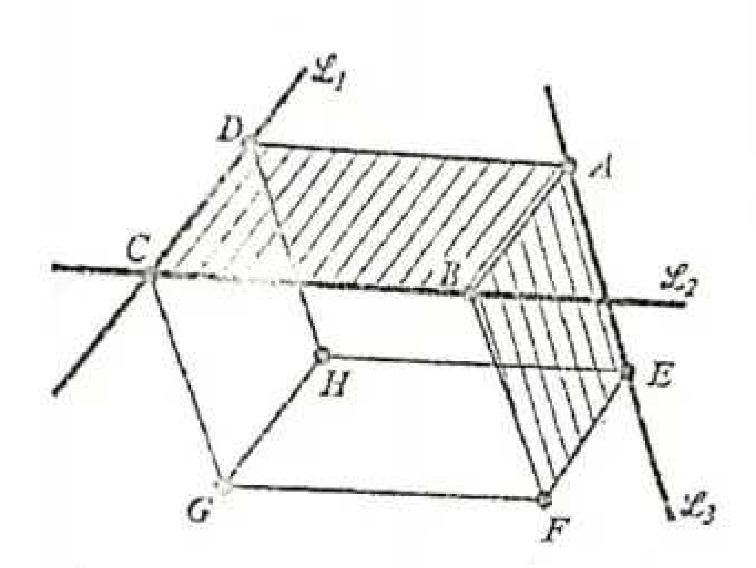
$$\mathscr{L}_3 = \{E + s(3,4,-2)\}$$

contienen las aristas de un paralelepípedo $ABCDEFGH$ uno de cuyos vértices es $E = (0,6,-1)$

1) Encontrar los vértices del paralelepípedo.

2) Calcular el volumen y el área lateral total del paralelepípedo

Solución.



1)

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = C$$

$$(-13,3,4) + t(7,-2,-1) = (-8,9,-3) + r(4,-3,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 7t - 4r &= 5 \\ -2t + 3r &= 6 \\ -t - r &= -7 \end{aligned}\right\} \quad t = 3, r = 4$$

$$C = (8,-3,1), \quad \overrightarrow{CE} = (-8,9,-2)$$

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_3 = \emptyset, \quad \mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_3 = \emptyset, E \notin \mathscr{L}_1, \quad E \notin \mathscr{L}_2$$

$\square CDAE: \quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$.

$$(-8, 9, -2) = k(7, -2, -1) + p(4, -3, 1) + q(3, 4, -2)$$

$$\left.\begin{aligned} 7k + 4p + 3q &= -8 \\ -2k - 3p + 4q &= 9 \\ -k + p - 2q &= -2 \end{aligned}\right\} \qquad q = 1,\ p = -1,\ k = -1$$

$$\overrightarrow{CD} = k(7, -2, -1) = (-7, 2, 1) \Longrightarrow D = C + (-7, 2, 1) = (1, -1, 2)$$
$$\overrightarrow{DA} = p(4, -3, 1) = (-4, 3, -1) \Longrightarrow A = D + (-4, 3, -1) = (-3, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AE} = q(3, 4, -2) = (3, 4, -2)$$
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}, \quad \overrightarrow{CD} = (-7, 2, 1)$$
$$\overrightarrow{BA} = (-7, 2, 1) \Longrightarrow B = A - (-7, 2, 1) = (4, 0, 0)$$
$$\overrightarrow{FE} = (-7, 2, 1) \Longrightarrow F = E - (-7, 2, 1) = (7, 4, -2)$$
$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{DA} = (-4, 3, -1) \Longrightarrow H = E - (-4, 3, -1) = (4, 3, 0)$$
$$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HE} = (-4, 3, -1) \Longrightarrow G = F - (-4, 3, -1) = (11, 1, -1)$$

2)

$$V = |[\overrightarrow{HG}\ \overrightarrow{HE}\ \overrightarrow{HD}]|$$

$$\overrightarrow{HG} = (7, -2, -1)$$
$$\overrightarrow{HE} = (-4, 3, -1)$$
$$\overrightarrow{HD} = (-3, -4, 2)$$

$$[\overrightarrow{HG}\ \overrightarrow{HE}\ \overrightarrow{HD}] = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -33 \Longrightarrow V = |-33| = 33$$

$$S = 2\square ABCD + 2\square HGCD + 2\square HDAE$$

$$S = 2|\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CD}| + 2|\overrightarrow{HG} \times \overrightarrow{HD}| + 2|\overrightarrow{HE} \times \overrightarrow{HD}|$$

$$S = 2|(5,11,13)| + 2|(-8,-17,22)| + 2|(2,11,25)|$$
$$= 2\sqrt{315} + 2\sqrt{737} + 2\sqrt{750}$$

[illegible]

El triángulo cuyos vértices son $A = (5,-4,3)$, $B = (4,-1,-2)$ y $C = (10,-5,2)$ se proyecta ortogonalmente sobre el plano $\mathscr{P}: \quad x - y - 3 = 0$ y se obtiene A', B' y C' respectivamente.

1) Encontrar los vértices y el área del nuevo triángulo.



2) Se construye un prisma recto con base $A'B'C'$ y la obra base el plano paralelo a $\mathscr{P}$ que contenga a un vértice del $\triangle ABC$ de modo que el volumen del prisma sea mínimo. Calcular dicho volumen.

3) Calcular la ecuación del plano ortogonal a $\mathscr{P}$ que contiene a C' y divide al prisma recto en dos regiones de igual volumen.

4) Calcular el volumen del tronco de prisma recto $A'B'C' - ABC$.

Solución.

1)

$$\mathscr{P}: \quad x - y - 3 = 0 \Longrightarrow \vec{n} = (1,-1,0)$$

$$\mathscr{L}_A = \{(5,-4,3) + t(1,-1,0)\}$$

$$\mathscr{L}_A \cap \mathscr{P}: \quad (5+t) - (-4-t) - 3 = 0 \Longrightarrow t = -3 \Longrightarrow A' = (2,-1,3)$$

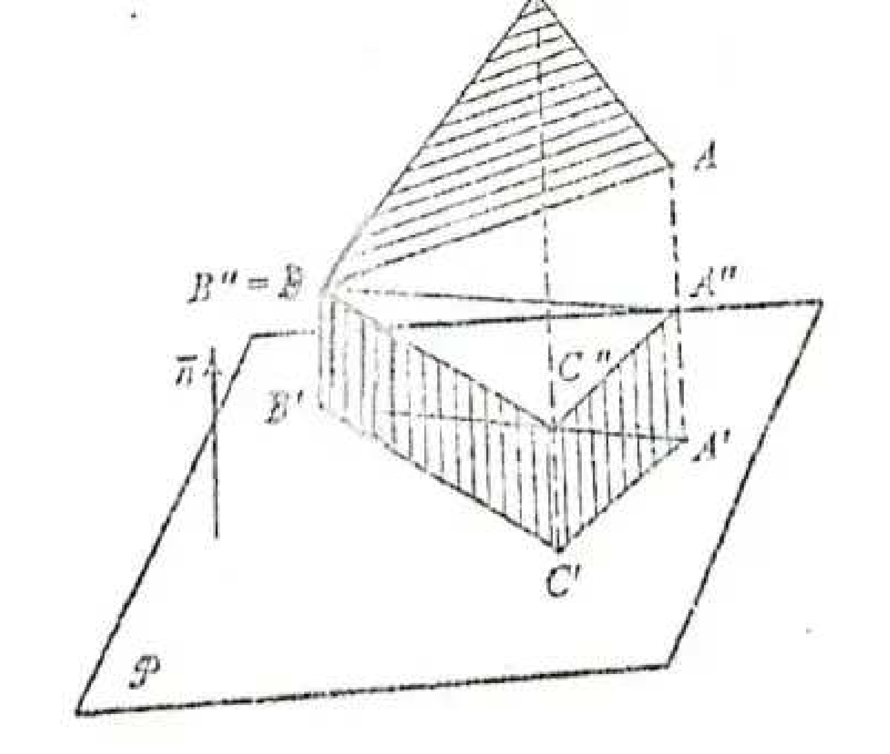
$$\mathscr{L}_B = \{(4,-1,-2) + r(1,-1,0)\}$$

$$\mathscr{L}_B \cap \mathscr{P}: \quad (4+r) - (-1-r) - 3 = 0 \Longrightarrow r = -1 \Longrightarrow B' = (3,0,-2)$$

$$\mathscr{L}_C = \{(10,-5,2) + k(1,-1,0)\}$$

$$\mathscr{L}_C \cap \mathscr{P}: \quad (10+k) - (-5-k) - 3 = 0 \Longrightarrow k = -6 \Longrightarrow C' = (4,1,2)$$

C







$$\text{área}\triangle A'B'C' = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B'C'} \times \overrightarrow{B'A'}|$$

$$\overrightarrow{B'C'} = (1, 1, 4), \qquad \overrightarrow{B'A'} = (-1, -1, 5)$$

$$\overrightarrow{B'C'} \times \overrightarrow{B'A'} = (9, -9, 0) = 9(1, -1, 0)$$

$$\text{área}\triangle A'B'C' = \frac{1}{2}(9\sqrt{2})\text{u}^2$$

2)

$$|\overrightarrow{AA'}| = 3\sqrt{2}, \qquad |\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{2}, \qquad |\overrightarrow{CC'}| = 6\sqrt{2}, \qquad B'' = B$$

Calculamos la ecuación del plano $\mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}$ que contiene a B.

$\mathscr{P}_1$ contiene a B'', A'' y C'' (por dato)

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{n}_1 \cdot (P - B'') = 0, \qquad \bar{n}_1 = \bar{n}$$

$$(1, -1, 0) \cdot (x - 4, y + 1, z + 2) = 0$$

$$\mathscr{P}_1 : \quad x - y - 5 = 0, \qquad \bar{n}_1 = (1, -1, 0)$$

$$A'' = A' + \sqrt{2}\frac{\bar{n}_1}{|\bar{n}_1|} = (2, -1, 3) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (3, -2, 3)$$

$$B'' = B' + \sqrt{2}\frac{\bar{n}_1}{|\bar{n}_1|} = (3,0,-2) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = (4,-1,-2) = B$$

$$C'' = C' + \sqrt{2}\frac{\bar{n}_1}{|\bar{n}_1|} = (4,1,2) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = (5,0,2)$$

$$V = \text{volumen mínimo del prisma}$$

$$\begin{aligned} V &= (\text{área base})(\text{altura}) \\ &= \frac{1}{2}(9\sqrt{2})\sqrt{2} \\ &= 9\text{u}^3 \end{aligned}$$

3) Sean $\mathscr{P}_2$ el plano ortogonal a $\mathscr{P}_1$ que contiene a C' y divide al prisma recto en dos regiones de igual volumen.

$$\triangle A''B''C'': \quad M = \frac{A'' + B''}{2} = \frac{1}{2}(7,-3,1)$$

$$\overrightarrow{C''M} = M - C'' = (\frac{7}{2} - 5, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} - 2) = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$$

$$\overrightarrow{C''M} \text{ y } \bar{n}_1 \subset \mathscr{P}_2$$

$$\vec{n}_2 \parallel \overrightarrow{C''M} \times \bar{n}_1$$

entonces

$$\bar{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,1,-2)$$

$$\mathscr{P}_2: \quad \bar{n}_2 \cdot (P - C') = 0 \qquad C' = (4,1,2)$$

$$(1,1,-2) \cdot (x-4, y-1, z-2) = 0$$

$$\mathscr{P}_2: \quad x + y - 2z - 1 = 0$$

4)

$$V = (\text{área}\triangle A'B'C')(\frac{A'A + B'B + C'C}{3})$$

$$= (\frac{9}{2}\sqrt{2})(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{3})$$
$$= 30u^3$$

Ejercicio [illegible]

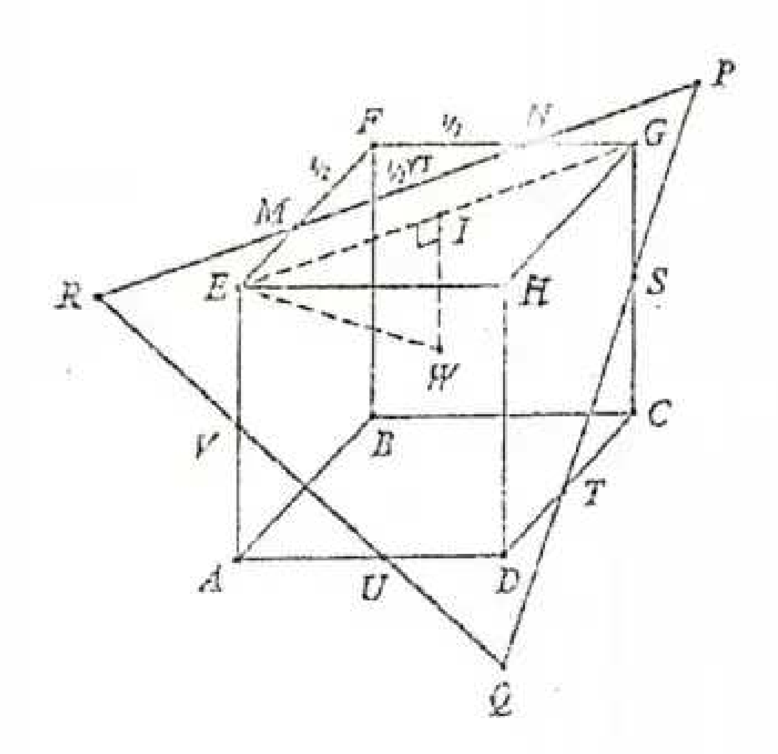
Dado un cubo, el triángulo formado al prolongar las rectas que unen los puntos medios de seis aristas consecutivas y no situadas 3 a 3 en un mismo plano tiene como vértices los puntos $P = (22, -3, -\frac{11}{2})$, $Q = (4, \frac{3}{2}, -10)$ y $R = (\frac{17}{2}, -3, 8)$. Calcular



1) El volumen del cubo.

2) Los vértices del cubo.

Solución.



1)

$$\overrightarrow{PQ} = (-18, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2}) = \frac{9}{2}(-4, 1, -1) = \bar{a}$$
$$\overrightarrow{PR} = (-\frac{27}{2}, 0, \frac{27}{2}) = \frac{9}{2}(-3, 0, 3) = \bar{b}$$
$$\overrightarrow{QR} = (\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}, 18) = \frac{9}{2}(1, -1, 4)$$

$$\overrightarrow{QR} = (\frac{}{2}, -\frac{}{2}, 13) = \frac{}{2}(\ ,\ ,\ )$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| = \frac{27}{2}\sqrt{2}$$

$\triangle PQR$ es equilátero

$$\begin{aligned}
\text{área } \triangle PQR &= \frac{1}{2}|\bar{a} \times \bar{b}| \\
&= \frac{1}{2}(\frac{9}{2})(\frac{27}{2}) \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{9}{2})(\frac{27}{2})|(1,5,1)|
\end{aligned}$$

$$= \frac{(27)^2\sqrt{3}}{8}$$

Sea l la arista del cubo. Los puntos medios de las aristas determinan un hexágono regular de lado $\frac{l}{2}\sqrt{2}$

$$RP = \frac{27}{2}\sqrt{2} = 3(\frac{l}{2}\sqrt{2}) \Longrightarrow l = 9$$
$$V = l^3 = 9^3 = 729\text{u}^3$$

2)

$$\begin{aligned}
\overline{RP}: \quad & \frac{RM}{MP} = \frac{1}{2} = r \Longrightarrow M = \frac{R + rP}{1 + r} = (13, -3, \frac{7}{2}) \\
& \frac{RN}{NP} = 2 = r \Longrightarrow N = \frac{R + rP}{1 + r} = (\frac{35}{2}, -3, -1) \\
\overline{QP}: \quad & \frac{QT}{TP} = \frac{1}{2} = r \Longrightarrow T = \frac{Q + rP}{1 + r} = (10, 0, -\frac{17}{2}) \\
& \frac{QS}{SP} = 2 = r \Longrightarrow S = \frac{Q + rP}{1 + r} = (16, -\frac{3}{2}, -7) \\
\overline{RQ}: \quad & \frac{RV}{VQ} = \frac{1}{2} = r \Longrightarrow V = \frac{R + rQ}{1 + r} = (7, -\frac{3}{2}, 2) \\
& \frac{RU}{UQ} = 2 = r \Longrightarrow U = \frac{R + rQ}{1 + r} = (\frac{11}{2}, 0, -4)
\end{aligned}$$

$W = (\frac{23}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ centro de gravedad del $\triangle$ y del cubo.

$\bar{n} = (1,5,1)$ es el vector normal al plano que contiene al $\triangle PQR$

$$AG = BH = CE = DF = l\sqrt{3}$$

son diagonales del cubo

$$\mathscr{L}_{BH} = \{W + t\bar{n}\} = \{(\frac{23}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}) + t(1,5,1)\}$$

$$\overrightarrow{WH} = \frac{l}{2}\sqrt{3}\frac{(1,5,1)}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{2}(1,5,1)$$



entonces

$$H = W + \frac{3}{2}(1,5,1) = (13,6,-1)$$

$$W = \frac{B+H}{2}$$

luego

$$B = 2W - H = (23,-3,-5) - (13,6,-1) = (10,-9,-4)$$

$\triangle BTU$ pertenece al plano de la base cuya normal es $\bar{n}_1$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BU} = (\frac{11}{2}, 0, -4) - (10,-9.-4) = (-\frac{9}{2}, 9, 0)\\ \overrightarrow{BT} = (10, 0, -\frac{17}{2}) - (10,-9,-4) = (0, 9, -\frac{9}{2})\end{array}\right\}$$
$$\bar{n}_1 = \overrightarrow{BU} \times \overrightarrow{BT} \Longrightarrow \bar{n}_1 = (2,1,2)$$

$\bar{n}_1$ es normal del plano que contiene la cara $EFGH$

$I = \overline{EG} \cap \overline{FH}$ (punto medio de las diagonales de la cara $EFGH$)

$$\triangle EFG: \quad MN = \frac{l}{2}\sqrt{2} \Longrightarrow EG = l\sqrt{2}$$

2

$$\triangle EIW: \quad EI = \frac{l}{2}\sqrt{2}, \qquad EW = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$

$$WI = \frac{l}{2}, \qquad l = 9$$

$$\overrightarrow{WI} = \frac{9}{2}\frac{(2,1,2)}{3} = \frac{3}{2}(2,1,2)$$

$$I = W + (3, \frac{3}{2}, 3) = (\frac{29}{2}, 0, \frac{1}{2})$$



$$\overrightarrow{MN} = (\frac{9}{2}, 0, -\frac{9}{2})$$

entonces

$$\overrightarrow{EG} \parallel \overrightarrow{MN} \parallel (1,0,-1)$$

$$\overrightarrow{EG} = 9\sqrt{2}\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} = (9,0,-9)$$

$$\overrightarrow{EI} = (\frac{9}{2}, 0, -\frac{9}{2})$$

$$E = I - (\frac{9}{2}, 0, -\frac{9}{2}) = (10, 0, 5)$$

$$G = E + (9, 0, -9) = (19, 0, -4)$$

$$I = \frac{F + H}{2}$$

$$F = 2I - H = (16, -6, 2)$$

$$\overrightarrow{AE} = l\frac{(2,1,2)}{3} = (6,3,6)$$

$$A = E - (6,3,6) = (4,-3,-1)$$

$$\overrightarrow{HD} = -\overrightarrow{AE} = (-6,-3,-6)$$

$$D = H + (-6,-3,-6) = (7,3,-7)$$

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE} = (6,3,6)$$

$$C = G - (6,3,6) = (13,-3,-10)$$



Dos caras de un cubo se encuentran siempre sobre los planos

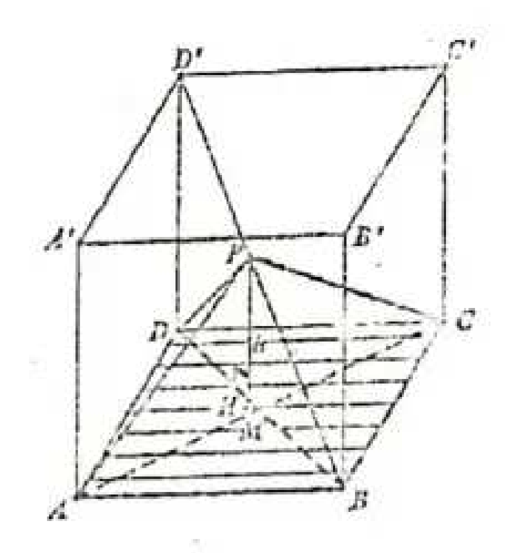
$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x - 2y + z - 1 = 0$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 2x - 2y + z + 8 = 0$$

Calcular el volumen de una pirámide cuyo vértice opuesto a una base del cubo



esta sobre una de las diagonales del cubo. Se sabe que la suma de los cuadrados de las aristas laterales de la pirámide es igual a 4 veces el cuadrado de una de las aristas del cubo.

Solución.



$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x - 2y + z - 1 = 0, \qquad P_1 = (0,0,1)$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad 2x - 2y + z + 8 = 0$$

$$d(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2)) = d(P_1, \mathscr{P}_2) = \left|\frac{1+8}{3}\right| = 3$$

$$l = 3$$
$$V = l^3 = 27u^3$$

(volumen del cubo)

$\triangle ABC$: aplicamos el teorema de la mediana

$$|\overrightarrow{BA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 2|\overrightarrow{BM}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$\left.\begin{array}{l} |\overrightarrow{AC}| = l\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BD}| = l\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{array}\right\} \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{BD}|^2 = 18$$





$$\left.\begin{array}{ll} \triangle APC: & |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 = 2|\overrightarrow{PM}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 \\ \triangle DPB: & |\overrightarrow{PD}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 2|\overrightarrow{PM}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|^2 \end{array}\right\} \text{sumando}$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PC}|^2 + |\overrightarrow{PD}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 = 4|\overrightarrow{PM}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|^2$$
$$4l^2 = 4|\overrightarrow{PM}|^2 + 18$$

entonces

$$|\overrightarrow{PM}|^2 = \frac{9}{2}$$
$$|\overrightarrow{PM}| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle D'DB \sim \triangle PHB: \quad \frac{D'D}{DB} = \frac{PH}{HB}$$
$$\frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{h}{HB}$$
$$HB = \sqrt{2}h$$

$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MB} \Longrightarrow |\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HM}| + |\overrightarrow{MB}| \qquad (4.74)$$

$$\triangle PHM: \quad |\overrightarrow{PM}|^2 = |\overrightarrow{PH}|^2 + |\overrightarrow{HM}|^2$$

$$|\overrightarrow{HM}|^2 = \frac{9}{2} - h^2$$

En (4.74)

$$\sqrt{2}h = \sqrt{\frac{9}{2} - h^2} + \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

entonces

$$3h(h-2) = 0$$



$$h = 2$$

$$V_p = \text{volumen del prisma}$$

$$V_p = \frac{1}{3}(\text{área base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{3}(9)(2)$$

$$= 6\text{u}^3$$

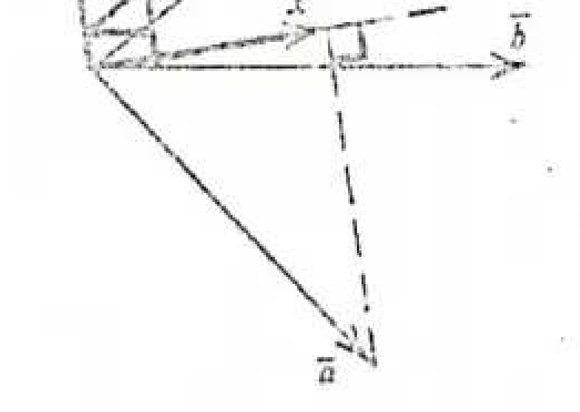
Ejemplo [illegible]

Sean los vectores $\bar{a} = (1, -3, 0)$, $\bar{b} = (1, -1, 2)$, $\bar{c} = (0, 1, -2)$. Determinar las proyecciones ortogonales de los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ sobre los planos de los vectores $(\bar{b}, \bar{c})$, $(\bar{a}, \bar{c})$ y $(\bar{a}, \bar{b})$ respectivamente

Solución.

1) $\text{proy}_{(\bar{b},\bar{c})}\,\bar{a}$





$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

$\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ están negativamente orientados

$$\text{proy}_{(\bar{b},\bar{c})}\,\bar{a} = \bar{x} = r\bar{b} + t\bar{c} \tag{4.75}$$

$$\bar{x} - \bar{a} \parallel \bar{n} \Longrightarrow \begin{cases} (\bar{x} - \bar{a}) \cdot \bar{b} = 0 & (4.76) \\ (\bar{x} - \bar{a}) \cdot \bar{c} = 0 & (4.77) \end{cases}$$

En (4.75)

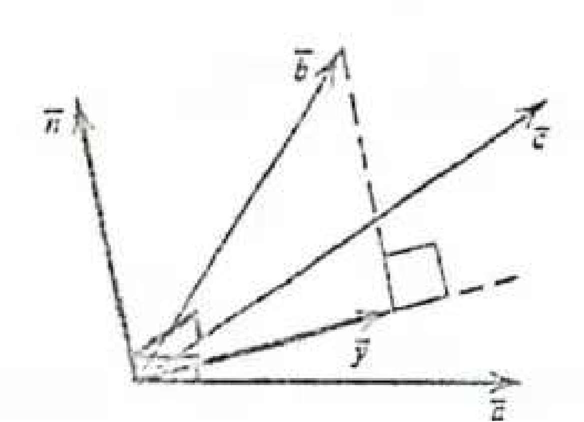
$$\bar{x} = r\bar{b} + t\bar{c} = r(1, -1, 2) + t(0, 1, -2) = (r, -r + t, 2r - 2t)$$

$$(\bar{x} - \bar{a}) \cdot \bar{b} = 0 \Longrightarrow 6r - 5t = 4$$

$$(\bar{x} - \bar{a}) \cdot \bar{c} = 0 \Longrightarrow -5r + 5t = -3$$

$r = 1, t = \frac{2}{5}$. Luego $\bar{x} = (1, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$

2) $\text{proy}_{(\bar{a},\bar{c})}\,\bar{b}$



$$[\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}] = -[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = 6 > 0$$

$\bar{b}, \bar{a}$ y $\bar{c}$ están positivamente orientados

$$\text{proy}_{(\bar{a},\bar{c})}\,\bar{b} = \bar{y} = m\bar{a} + n\bar{c} \tag{4.78}$$

$$\bar{b} - \bar{y} \parallel \bar{n} \Longrightarrow \begin{cases} (\bar{b} - \bar{y}) \cdot \bar{a} = 0 & (4.79) \\ (\bar{b} - \bar{y}) \cdot \bar{c} = 0 & (4.80) \end{cases}$$

En (4.78)

$$\bar{y} = m(1, -3, 0) + n(0, 1, -2) = (m, -3m + n, -2n)$$

$$(\bar{b} - \bar{y}) \cdot \bar{a} = 0 \Longrightarrow -10m + 3n = -4$$

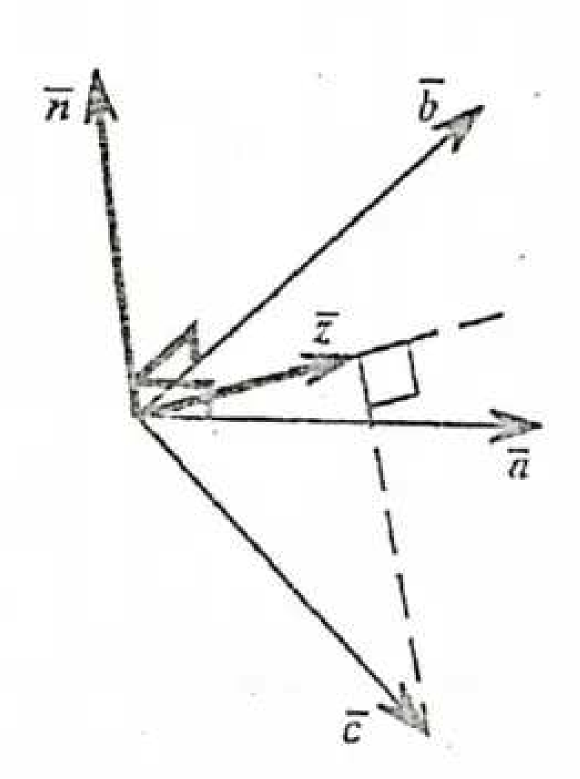
$$(\bar{b} - \bar{y}) \cdot \bar{c} = 0 \Longrightarrow 3m - 5n = 5$$

$m = \frac{5}{4}, \qquad \bar{n} = -\frac{38}{41}$

Luego

$\bar{y} = \frac{1}{41}(5, -53, 76)$

3) $\text{proy}_{(a,\bar{b})}\,\bar{c}$



$$[\bar{c}\;\bar{a}\;\bar{b}] = [\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}] = -6 < 0$$

$\bar{c}, \bar{a}$ y $\bar{b}$ están negativamente orientados

$$\text{proy}_{(\bar{a},b)}\,\bar{c} = \bar{z} = p\bar{a} + k\bar{b} \tag{4.81}$$

$$\bar{z} - \bar{c} \parallel \bar{n} \Longrightarrow \begin{cases} (\bar{z} - \bar{c}) \cdot \bar{a} = 0 & (4.82) \\ (\bar{z} - \bar{c}) \cdot \bar{b} = 0 & (4.83) \end{cases}$$

En (4.81)

$$\bar{z} = p(1,-3,0) + k(1,-1,2) = (p+k, -3p-k, 2k)$$

$$(\bar{z} - \bar{c}) \cdot \bar{a} = 0 \Longrightarrow 10p + 4k = -3$$

$$(\bar{z} - \bar{c}) \cdot \bar{b} = 0 \Longrightarrow 4p + 6k = -5$$

$p = \frac{1}{22}$, $\quad k = -\frac{19}{22}$. Luego

$$\bar{z} = \frac{1}{11}(-9, 8, -19)$$

[illegible]

$\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\} \subset V_3$ donde solamente $\{\bar{b}, \bar{c}, \bar{y}, \bar{z}\}$ son coplanares,

$$\bar{b} - \bar{c} = \bar{y} - \bar{z},\ \bar{b} - \bar{a} = \bar{y} - \bar{x},\ |\bar{b} \times \bar{c}| = |\bar{z} \times \bar{y}| = 10$$

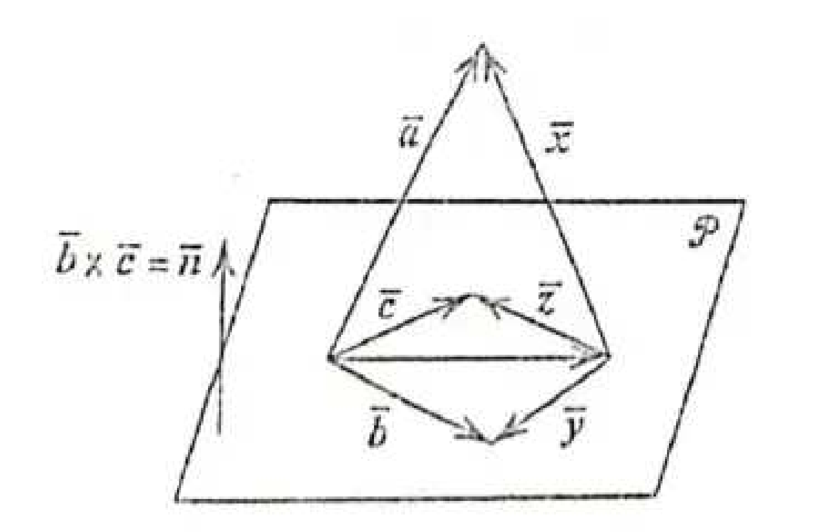
Si $A = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$, $B = \bar{x} + 2\bar{y} + 2\bar{z}$, $C = \bar{x} + \bar{y} + 2\bar{z}$ y

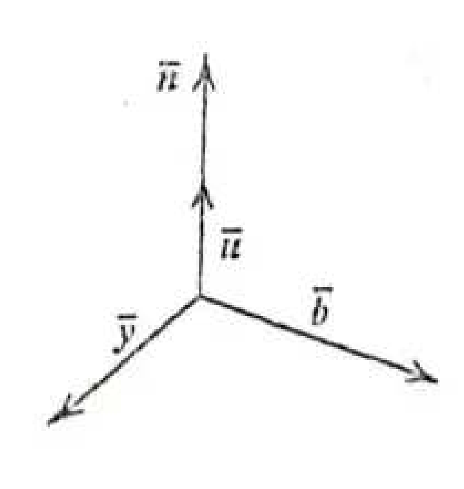
$$\begin{vmatrix} A \cdot (2\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) & B \cdot (2\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) & C \cdot (2\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \\ A \cdot (2\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) & B \cdot (2\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) & C \cdot (2\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}) \\ A \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) & B \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) & C \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \end{vmatrix} = -64$$

Hallar

$$\text{proy}_{\bar{y} \times \bar{b}}(\bar{a} + \bar{x})$$

Solución.









$$\bar{b} - \bar{c} = \bar{y} - \bar{z} \Longrightarrow \bar{b} - \bar{y} = \bar{c} - \bar{z}$$
$$\bar{b} - \bar{a} = \bar{y} - \bar{x} \Longrightarrow \bar{b} - \bar{y} = \bar{a} - \bar{x} \Longrightarrow \bar{b} - \bar{y} + \bar{x} = \bar{a}$$

$$\bar{u} = \frac{\bar{n}}{|\bar{n}|}$$

$$\text{proy}_{\bar{n}}\, \bar{a} = \text{proy}_{\bar{n}}\, \bar{x}$$
$$\text{proy}_{\bar{u}}\, \bar{a} = \text{proy}_{\bar{u}}\, \bar{x}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\text{proy}_{\bar{y}\times\bar{b}}\, \bar{a} &= \text{proy}_{\bar{y}\times\bar{b}}\, \bar{x} \\
\text{proy}_{\bar{y}\times\bar{b}}(\bar{a} + \bar{x}) &= \text{proy}_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{x}) \\
\text{proy}_{\bar{y}\times\bar{b}}(\bar{a} + \bar{x}) &= \text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}(\bar{a} + \bar{x}) \\
&= \text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{a} + \text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{x} \\
&= 2\, \text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\text{proy}_{\bar{y}\times\bar{b}}(\bar{a} + \bar{x})\right| &= 2\left|\text{proy}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{a}\right| \\
&= 2\left|\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\, \bar{a}\right|
\end{aligned}$$

$$= 2\left|\frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{|\bar{b}\times\bar{c}|}\right|$$

$$= \frac{1}{5}|[\bar{a}\;\bar{b}\;\bar{c}]| \tag{4.84}$$

Por otro lado, se tiene como dato el determinante, entonces:

$$\xrightarrow[f_2-f_3]{f_1-f_3}$$

$$\begin{vmatrix} A\cdot\bar{a} & B\cdot\bar{a} & C\cdot\bar{a} \\ A\cdot(\bar{a}+\bar{b}) & B\cdot(\bar{a}+\bar{b}) & C\cdot(\bar{a}+\bar{b}) \\ A\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) & B\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) & C\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1}$$

$$\begin{vmatrix} (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot\bar{a} & (\bar{y}+\bar{z})\cdot\bar{a} & \bar{z}\cdot\bar{a} \\ (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) & (\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) & \bar{z}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) \\ (\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) & (\bar{y}+\bar{z})\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) & \bar{z}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[f_2-f_1]{f_3-f_2}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{x}\cdot\bar{a} & \bar{y}\cdot\bar{a} & \bar{z}\cdot\bar{a} \\ \bar{x}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) & \bar{y}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) & \bar{z}\cdot(\bar{a}+\bar{b}) \\ \bar{x}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) & \bar{y}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) & \bar{z}\cdot(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{x}\cdot\bar{a} & \bar{y}\cdot\bar{a} & \bar{z}\cdot\bar{a} \\ \bar{x}\cdot\bar{b} & \bar{y}\cdot\bar{b} & \bar{z}\cdot\bar{b} \\ \bar{x}\cdot\bar{c} & \bar{y}\cdot\bar{c} & \bar{z}\cdot\bar{c} \end{vmatrix} = -64$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x}\cdot\bar{a} & \bar{y}\cdot\bar{a} & \bar{z}\cdot\bar{a} \\ \bar{x}\cdot\bar{b} & \bar{y}\cdot\bar{b} & \bar{z}\cdot\bar{b} \\ \bar{x}\cdot\bar{c} & \bar{y}\cdot\bar{c} & \bar{z}\cdot\bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}\cdot\bar{x} & \bar{a}\cdot\bar{y} & \bar{a}\cdot\bar{z} \\ \bar{b}\cdot\bar{x} & \bar{b}\cdot\bar{y} & \bar{b}\cdot\bar{z} \\ \bar{c}\cdot\bar{x} & \bar{c}\cdot\bar{y} & \bar{c}\cdot\bar{z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bar{x}\cdot\bar{a} & \bar{y}\cdot\bar{a} & \bar{z}\cdot\bar{a} \\ \bar{x}\cdot\bar{b} & \bar{y}\cdot\bar{b} & \bar{z}\cdot\bar{b} \\ \bar{x}\cdot\bar{c} & \bar{y}\cdot\bar{c} & \bar{z}\cdot\bar{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}][\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}]$$

$$= -64$$

$(\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}))(\bar{x}\cdot(\bar{y}\times\bar{z})) = -64$, dato: $|\bar{b}\times\bar{c}| = |\bar{z}\times\bar{y}| = 10$

$$\left(\frac{\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})}{|\bar{b}\times\bar{c}|}\right)\left(\frac{\bar{x}\cdot(\bar{y}\times\bar{z})}{|\bar{y}\times\bar{z}|}\right) = \frac{-64}{(10)(10)}$$

entonces

$$(\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a})(\text{comp}_{\bar{y}\times\bar{z}}\,\bar{x}) = -\frac{64}{100} \tag{4.85}$$

Además

$$\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a} = -\,\text{comp}_{\bar{y}\times\bar{z}}\,\bar{x} \tag{4.86}$$

(4.86) en (4.85)

$$-(\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a})^2 = -\frac{64}{100}$$

$$\text{comp}_{\bar{b}\times\bar{c}}\,\bar{a} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{|\bar{b}\times\bar{c}|} = \frac{8}{10}$$

En (4.84)

$$|\,\text{proy}_{\bar{y}\times\bar{b}}(\bar{a}+\bar{x})| = \frac{1}{5}[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = \frac{8}{5}$$

Ejercicio 4.[illegible]

Si $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ son no coplanares, demostrar que

$$\bar{d} = \frac{[\bar{d}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}\bar{a} + \frac{[\bar{a}\ \bar{d}\ \bar{c}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}\bar{b} + \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}\bar{c}$$

Solución.

Si $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son no coplanares entonces $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$ entonces $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ es L.I. entonces

$$\forall \bar{d} \in \mathbb{R}^3, \quad \bar{d} = r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c} \tag{4.87}$$

$$\bar{d} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = r\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \Longrightarrow r = \frac{[\bar{d}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

$$\bar{d} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = s\bar{b} \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) \Longrightarrow s = \frac{[\bar{d}\ \bar{a}\ \bar{c}]}{[\bar{b}\ \bar{a}\ \bar{c}]} = \frac{-[\bar{a}\ \bar{d}\ \bar{c}]}{-[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]} = \frac{[\bar{a}\ \bar{d}\ \bar{c}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

$$\bar{d} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = t\bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) \Longrightarrow t = \frac{[\bar{d}\ \bar{a}\ \bar{b}]}{[\bar{c}\ \bar{a}\ \bar{b}]} = \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}$$

En (4.87)

$$\bar{d} = \frac{[\bar{d}\ \bar{b}\ \bar{c}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}\bar{a} + \frac{[\bar{a}\ \bar{d}\ \bar{c}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}\bar{b} + \frac{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{d}]}{[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]}\bar{c}$$

Ejercicio 4.62

En la intersección de los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad x + 2y + 3z - 6 = 0$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 3y - 2z = 0$$

se ubican los puntos A y R, en el plano $\mathscr{P}_2$ se ubica el punto T tal que $\overrightarrow{TR} \cdot \overrightarrow{AR} = 0$, C es un punto del plano $\mathscr{P}_1$ tal que

$$\cos(ATR) = \frac{3}{22}\sqrt{22}$$
$$\cos(TAC) = \frac{2}{55}\sqrt{385}$$

Sean

$$\bar{a} = (1, 0, 0), \quad \text{comp}_{\bar{a}}\overrightarrow{AR} < 0, \quad \text{comp}_{\bar{a}}\overrightarrow{RT} > 0$$

y

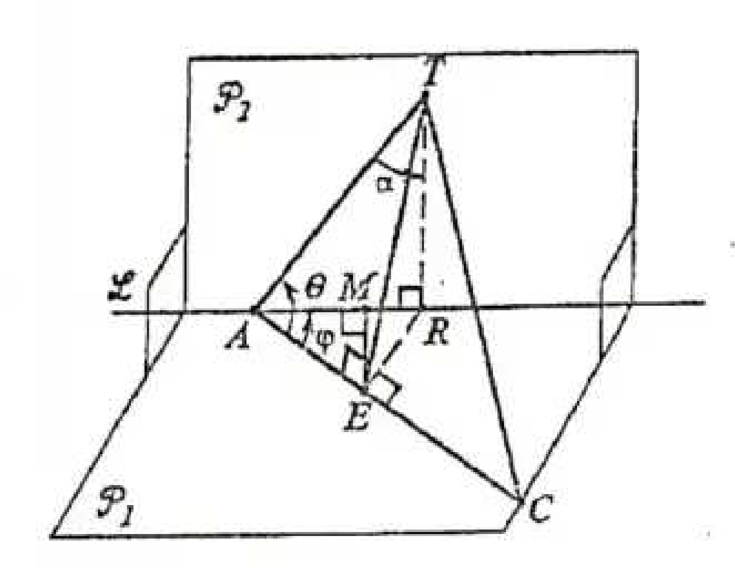
$$\bar{b} = (0,1,0), \quad \text{comp}_{\bar{b}}\, \overrightarrow{AC} > 0.$$

Si $B = (-7,2,3)$ es un punto del plano $\mathscr{P}_3$ determinado por los puntos A, T y C. Calcular la ecuación del plano $\mathscr{P}_3$

Solución.
En el gráfico usamos el teorema de las tres perpendiculares

$$\overline{TR} \perp \mathscr{P}_1, \quad \overline{RE} \perp \overline{AC} \Longrightarrow \overline{ET} \perp \overline{AC}$$





$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1 = (1,2,3) \qquad \mathscr{P}_2: \quad \bar{n}_2 = (0,3,-2)$$

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \Longrightarrow \mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2$$

$$\overrightarrow{AR} \parallel \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = (-13,2,3)$$

$$\overrightarrow{RT} \perp \mathscr{P}_1 \Longrightarrow \overrightarrow{RT} \parallel \bar{n}_1 = (1,2,3)$$

entonces

$$\overrightarrow{RT} = k\bar{n}_1, \quad k > 0, \quad |\overrightarrow{RT}| = k\sqrt{14}$$

$$\triangle ATR: \quad \cos\alpha = \frac{TR}{\ldots} = \frac{k\sqrt{14}}{\ldots} = \frac{3}{\ldots}\sqrt{22}$$

entonces

$$AT = \frac{k22\sqrt{14}}{3\sqrt{22}} = \frac{2}{3}k\sqrt{77}$$

$$AR^2 = AT^2 - TR^2 = \frac{4}{9}k^2(77) - 14k^2 = 7k^2\left(\frac{44}{9} - 2\right) = 7k^2\left(\frac{26}{9}\right)$$

entonces

$$AR = \frac{k}{3}\sqrt{182}$$



$$\triangle ATE: \quad \cos\theta = \frac{AE}{AT} = \frac{AE}{\frac{2}{3}k\sqrt{77}} = \frac{2}{55}\sqrt{385}$$

entonces

$$AE = \frac{4k\sqrt{77}\sqrt{385}}{3(55)} = \frac{4k(77)\sqrt{5}}{3 \times 55} = \frac{28}{15}k\sqrt{5}$$

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L} = \{(6,0,0) + t(-13,2,3)\}$$

$$\text{comp}_{(1,0,0)}\overrightarrow{AR} < 0 \qquad \overrightarrow{AR} \parallel (-13,2,3)$$

$$\overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AR}|\vec{u}_{\overrightarrow{AR}} = \frac{k}{3}\sqrt{182}\frac{(-13,2,3)}{\sqrt{182}} = \frac{k}{3}(-13,2,3), \qquad k > 0$$

$$\triangle ATR: \quad \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RT} = \frac{k}{3}(-13,2,3) + k(1,2,3) = \frac{2k}{3}(-5,4,6)$$

Sea $m\angle RAE = \varphi$ entonces

$$\cos\varphi = \frac{AE}{AR} = \frac{AM}{AE} \Longrightarrow AM = \frac{AE^2}{AR}$$

$$AM = \frac{(\frac{28}{15}k\sqrt{5})^2}{\frac{k}{3}\sqrt{182}} = \frac{28^2(15)k^2}{(15)^2k\sqrt{182}} = \frac{28^2k}{15\sqrt{182}} = \frac{56k}{13(15)}\sqrt{182}$$

$$\begin{aligned} \triangle AER: \quad ER^2 &= AR^2 - AE^2 \\ &= \left(\frac{k}{3}\sqrt{182}\right)^2 - \left(\frac{28}{15}k\sqrt{5}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{k^2 14}{5}$$

entonces

$$ER = \frac{\sqrt{70}k}{5}$$

$$\triangle AEM \text{ y } \triangle AER: \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{EM}{AE} = \frac{ER}{AR}$$

entonces

$$\begin{aligned} EM &= \frac{ER}{AR}AE \\ &= \frac{\frac{\sqrt{70}}{5}k\frac{28k}{15}\sqrt{5}}{\frac{k}{3}\sqrt{182}} \\ &= \frac{28k\sqrt{13}}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EM} \perp \mathscr{P}_2: \quad \overrightarrow{EM} &= |\overrightarrow{EM}|\overline{u}_{\overrightarrow{EM}} \\ &= \frac{28k\sqrt{13}}{65}\left(\frac{\pm(0,3,-2)}{\sqrt{13}}\right) \end{aligned}$$

$$= \pm k\frac{}{65}(0, 3, -2)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= |\overrightarrow{AM}|\bar{u}_{\overrightarrow{AM}}\\ &= \frac{k(56)\sqrt{182}}{195}\frac{(-13,2,3)}{\sqrt{182}}\\ &= k\frac{(56)}{195}(-13,2,3)\end{aligned}$$

(dato) $\text{comp}_{\bar{a}}\,\overrightarrow{AM} < 0$, de $\text{comp}_{\bar{b}}\,\overrightarrow{AC} > 0$ entonces

$$\overrightarrow{AE} = w\overrightarrow{AC}, \quad w > 0 \Longrightarrow \text{comp}_{\bar{b}}\,\overrightarrow{AE} > 0$$



$$\begin{aligned}\triangle AEM: \quad \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME}\\ \overrightarrow{AE} &= \frac{56}{195}k(-13,2,3) + \frac{28}{65}k(0,3,-2)\\ &= \frac{k}{195}(-728,364,0) \parallel (-2,1,0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_3: \quad \bar{n}_3 &= \overrightarrow{AT} \times \overrightarrow{AE}\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ -5 & 4 & 6\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix} = (-6,-12,3) \parallel (2,4,-1)\\ &= i(-6) - j(12) + k(3)\end{aligned}$$

$$P_0 = (-7,2,3) \in \mathscr{L} \cap \mathscr{P}_3$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_3: \quad \bar{n}_3 \cdot (P - P_0) &= 0\\ (2,4,-1)\cdot(x+7, y-2, z-3) &= 0\end{aligned}$$

entonces

$$\mathscr{P}_3: \quad 2x + 4y - z + 9 = 0$$

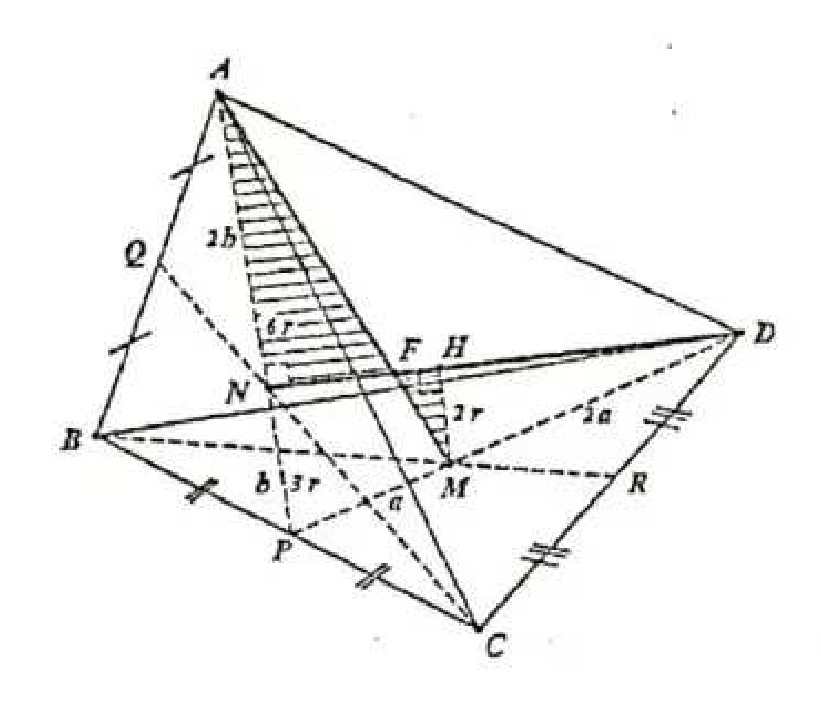
Ejercicio 4.13

En un tetraedro $ABCD$ de base BCD, sentido antihorario

$$M = (3, 3, \frac{4}{3})$$
$$N = (\frac{13}{3}, \frac{23}{3}, -\frac{4}{3})$$

son baricentros de las caras BCD y ABC respectivamente, $\overline{AM} \cap \overline{DN} = F$, si $|\overrightarrow{AF}| = \frac{1}{2}\sqrt{430}$ y $\overrightarrow{AM} = r(-9, -18, 5)$ donde $r > 0$. Sea $\mathscr{P}$ el plano con normal $\overrightarrow{AN}$ y un punto de paso N. Encontrar la ecuación del plano $\mathscr{P}$.

Solución.



$$\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{AM} \Longrightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\sqrt{430}\frac{(-9, -18, 5)}{\sqrt{81 + 324 + 25}}$$
$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(-9, -18, 5)$$

Trazamos $\overrightarrow{MH} \parallel \overrightarrow{PN}$ entonces

$$\triangle PND \approx \triangle MHD$$

Si $MH = 2r$ entonces $\overrightarrow{PN} = 3r$ y $NA = 6r$

$\triangle ANF \approx \triangle MHF$ y están en la relación de 3 a 1.

$$|\overrightarrow{FM}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{FA}| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{430}\right) = \frac{1}{6}\sqrt{430}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FM} &= \frac{1}{6}\sqrt{430}\,\vec{u}_{\overrightarrow{FM}} \\
&= \frac{1}{6}\sqrt{430}\frac{(-9,-18,5)}{\sqrt{430}} \\
&= \frac{1}{6}(-9,-18,5)
\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FM}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(-9,-18,5) + \frac{1}{6}(-9,-18,5) \\
&= \frac{2}{3}(-9,-18,5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= N - M \\
&= \left(\frac{13}{3},\frac{23}{3},-\frac{4}{3}\right) - \left(3,3,\frac{4}{3}\right) \\
&= \left(\frac{4}{3},\frac{14}{3},-\frac{8}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\triangle AMN: \quad \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} \\
&= \frac{2}{3}(-9,-18,5) + \frac{2}{3}(2,7,-4) \\
&= \frac{2}{3}(-7,-11,1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}: \quad \vec{n} &= \overrightarrow{AN} \parallel (7,11,-1) \\
P_0 &= N = \left(\frac{13}{3},\frac{23}{3},-\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n}\cdot(P-P_0)=0$$

$$(7,11,-1)\cdot(x-\frac{13}{3},y-\frac{13}{3},z+\frac{4}{3})=0$$

$$\mathscr{P}: \quad 7x+11y-z-116=0$$



Una partícula con movimiento rectilíneo uniforme parte del punto $(11,21,20)$ en la dirección del vector $(-1,2,-2)$ y con velocidad $v=12$

1) Determinar el tiempo que necesita para recorrer el segmento comprendido en-



tre los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad 2x+3y+5z-41=0$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 2x+3y+5z+31=0$$

2) Cuál es el tiempo mínimo que la partícula necesita para pasar de un plano a otro, si la velocidad es la misma.

Solución.

$$P_0=(11,-21,20) \qquad \bar{a}=(-1,2,-2), \qquad v=12$$
$$\mathscr{L}=\{P_0+t\bar{a}\} \Longrightarrow \mathscr{L}=\{(11,-21,20)+t(-1,2,-2)\}$$

1)

$$\mathscr{L}\cap\mathscr{P}_1=P_1, \qquad \mathscr{L}\cap\mathscr{P}_2=P_2$$
$$\mathscr{L}\cap\mathscr{P}_1: \quad 2(11-t)+3(-21+2t)+5(20-2t)-41=0 \Longrightarrow t=3$$
$$P_1=(11,-21,20)+3(-1,2,-2)=(8,-15,14)$$
$$\mathscr{L}\cap\mathscr{P}_2: \quad 2(11-r)+3(-21+2r)+5(20-2r)+31=0 \Longrightarrow r=15$$
$$P_2=(11,-21,20)+15(-1,2,-2)=(-4,9,-10)$$
$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(-4-8)^2+(9+15)^2+(-10-14)^2}=36$$

$$e = v \cdot t \Longrightarrow t = \frac{e}{v} = \frac{36}{12} = 3 \text{ seg}$$

2) Calculamos la distancia mínima entre $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$.

Observamos que $\mathscr{P}_1 \parallel \mathscr{P}_2$ entonces

$$Q_1 = (0, 0, \frac{41}{5}) \in \mathscr{P}_1$$

$$d(Q_1, \mathscr{P}_2) = \left| \frac{2(0) + 3(0) + 5(\frac{41}{5}) + 31}{\sqrt{4 + 9 + 25}} \right| = \frac{72}{\sqrt{38}} = \frac{36}{19}\sqrt{38}$$

$$e = vt \Longrightarrow t = \frac{e}{v} = \frac{36\sqrt{38}}{19(12)} = \frac{3\sqrt{38}}{19} \text{ seg}$$





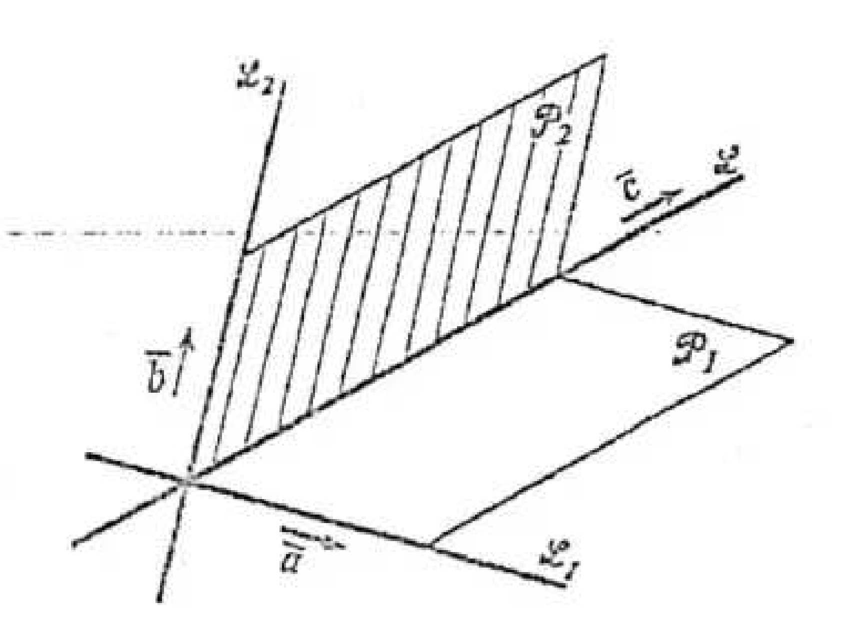
Dadas las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(-1, 3, 3) + t(0, 1, -1)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(-1, 3, 1) + r(1, -1, 1)\}$$

una recta $\mathscr{L}$ corta perpendicularmente a las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}$ y las rectas $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}$ determinan los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ respectivamente. Hallar el ángulo formado por los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$

Solución.
En efecto

$$\mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (0, 1, -1), \qquad \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (1, -1, 1)$$



$$\mathscr{L} \parallel \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, -1)$$

$$\mathscr{L} \parallel \bar{c} = (0, 1, 1)$$

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{n}_1 = \bar{a} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, 0)$$

$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{n}_2 = \bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

$m\angle(\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2) = \theta$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} \\ &= \frac{(2,0,0)}{2} \cdot \frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{6}} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} < 0 \end{aligned}$$

(θ obtuso)

Ejercicio [illegible]

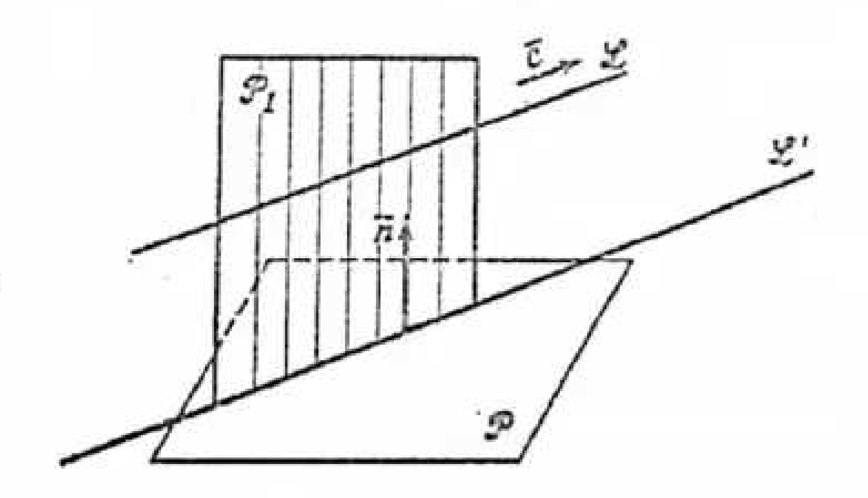
1) Determinar la ecuación del plano que proyecta a la recta

$$\mathscr{L} \begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

sobre el plano $\mathscr{P} : \; x + 2y + 3z - 5 = 0.$

2) Hallar dicha proyección.

Solución.



1) En la figura el plano buscado es $\mathscr{P}_1$ determinado por los vectores no paralelos

$\bar{n}$ (vector normal del plano $\mathscr{P}$) y $\bar{c}$ vector direccional de $\mathscr{L}$

(dato)

$$\mathscr{P}_2: \quad 3x + 2y - z - 1 = 0 \Longrightarrow \bar{n}_2 = (3, 2, -1)$$
$$\mathscr{P}_3: \quad 2x - 3y + 2z - 2 = 0 \Longrightarrow \bar{n}_3 = (2, -3, 2)$$

$$\bar{n}_2 \nparallel \bar{n}_3 \Longrightarrow \mathscr{P}_2 \nparallel \mathscr{P}_3 \Longrightarrow \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \mathscr{L}$$
$$\mathscr{L} = \{(-\frac{7}{13}, \frac{4}{13}, 0) + t(-1, 8, 13)\} \qquad \mathscr{L} \parallel \bar{c} = (-1, 8, 13)$$

$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1 \parallel \bar{n} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 8 & 13 \end{vmatrix} = (2, -16, 10)$$
$$\Longrightarrow \bar{n}_1 = (1, -8, 5)$$
$$\mathscr{P}_1: \quad \bar{n}_1 \cdot (P - P_0) = 0$$
$$(1, -8, 5) \cdot (x + \frac{7}{13}, y - \frac{4}{13}, z) = 0$$
$$\mathscr{P}_1: \quad x - 8y + 5z + 3 = 0$$

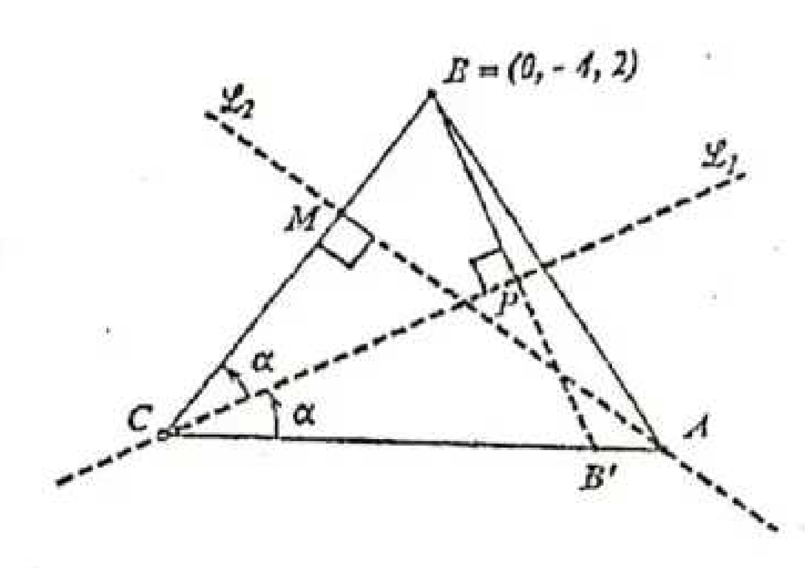
2) $\mathscr{L} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}$ entonces

$$\mathscr{L}' = \{(-\frac{17}{5}, -\frac{4}{5}, 0) + r(17, -1, -5)\}$$

Ejercicio 4.07

Hallar los vértices del $\triangle ABC$, si un vértice es el punto $B = (0, -4, 2)$, la bisectriz interior del vértice C es la recta $\mathscr{L}_1 = \{(-12, 11, -1) + t(9, -9, 2)\}$ y la altura trazada desde el vértice A es la recta $\mathscr{L}_2 = \{(58, 27, 5) + r(55, 28, 3)\}$

Solución.



$$\mathscr{P}_{BC}: \quad \bar{n}_2 = (55, 28, 3) \qquad B = (0, -4, 2) = P_0$$

$$\mathscr{P}_{BC}: \quad \bar{n}_2 \cdot (P - P_0) = 0$$

$$\mathscr{P}_{BC}: \quad 55x + 28y + 3z + 106 = 0$$

$$\mathscr{P}_{BC} \cap \mathscr{L}_2 = M = \left(-\frac{27}{46}, -\frac{130}{46}, \frac{83}{46}\right)$$

$$\overrightarrow{MB} = B - M$$

$$\left(\frac{27}{\quad} \quad -4 + \frac{130}{\quad} \quad 2 - \frac{83}{\quad}\right)$$

$$= \left(\frac{\quad}{46}, -4 + \frac{\quad}{46}, 2 - \frac{\quad}{46}\right)$$

$$= \left(\frac{27}{46}, -\frac{54}{46}, \frac{9}{46}\right) \parallel (3, -6, 1)$$

$$\mathscr{L}_{MB} = \{(0, -4, 2) + k(3, -6, 1)\}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(-12, 11, -1) + t(9, -9, 2)\}$$

$$\mathscr{L}_{MB} \cap \mathscr{L}_1 : \quad (0, -4, 2) + k(3, -6, 1) = (-12, 11, -1) + t(9, -9, 2)$$

$$t = 1, \qquad k = -1$$

$$\mathscr{L}_{MB} \cap \mathscr{L}_1 = C = (-3, 2, 1)$$

$$\mathscr{P}_{BB'} : \quad \bar{n}_1 \cdot (P - P_0) = 0 \qquad \bar{n}_1 = (9, -9, 2), \quad P_0 = B$$

$$(9, -9, 2) \cdot (x, y + 4, z - 2) = 0$$

$$\mathscr{P}_{BB'} : \quad 9x - 9y + 2z - 40 = 0$$

(B' simétrico de B con respecto a $\mathscr{L}_1$)

$$\mathscr{P}_{BB'} \cap \mathscr{L}_1 = P = \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 2\right)$$

$$P = \frac{B + B'}{2}$$

entonces

$$B' = 2P - B = (3, -5, 4) - (0, -4, 2) = (3, -1, 2)$$

$$\mathscr{L}_{CB'} \cap \mathscr{L}_2 = A$$

$$\mathscr{L}_{CB'} = \{(-3, 2, 1) + q(6, -3, 1)\}$$

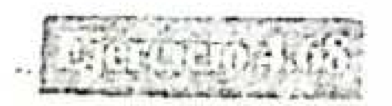
$$\mathscr{L}_2 = \{(58, 27, 5) + r(55, 28, 3)\}$$

$$\mathscr{L}_{CB'} \cap \mathscr{L}_2 : \quad (-3, 2, 1) + q(6, -3, 1) = (58, 27, 5) + r(55, 28, 3)$$

$$r = -1, \qquad q = 1$$

$$\mathscr{L}_{CB'} \cap \mathscr{L}_2 = A = (3, -1, 2)$$

Por tanto, en el gráfico $A = B'$.



Sea el $\triangle ABC$ donde

$$B = (3, 1, -3)$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(-8, -11, -1) + t(3, 3, -1)\}$$

$$\mathscr{L}_2 : \quad \frac{x - 11}{6} = \frac{y - 4}{3} = \frac{z + 14}{-7}$$

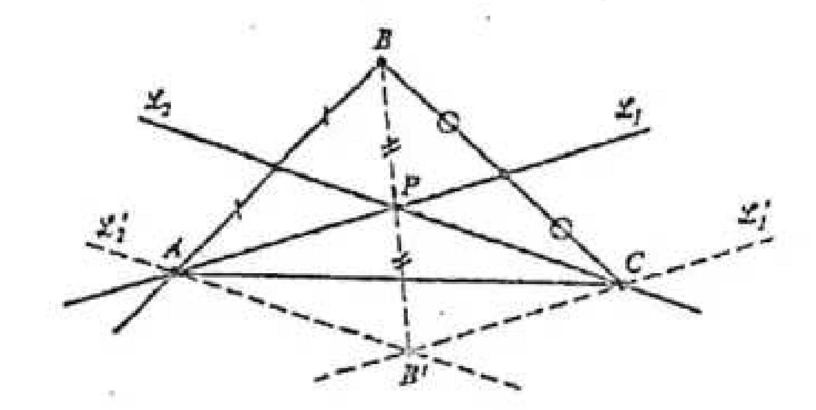
son las medianas del triángulo

1) Hallar los vértices del $\triangle ABC$

2) Hallar el volumen del tetraedro formado por la intersección del plano que contiene al $\triangle ABC$ con los planos que contienen a los ejes coordenados

Solución.
De los datos

$$A \in \mathscr{L}_1, \qquad C \in \mathscr{L}_2, \qquad B \notin \mathscr{L}_1, \qquad B \notin \mathscr{L}_2$$



1)

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P$$

$$(-8, -11, -1) + t(3, 3, -1) = (11, 4, -14) + r(6, 3, -7)$$

$$r = -\frac{4}{3}, \qquad t = \frac{11}{3}$$

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P = (3, 0, -\frac{14}{3})$$

$$P = \frac{B + B'}{2}$$

entonces

$$B' = 2P - B = (3, -1, -\frac{19}{3})$$

(B' simétrico de B con respecto a P)

$$\mathscr{L}_1' \parallel \mathscr{L}_1 \Longrightarrow \mathscr{L}_1' = \{(3, -1, -\frac{19}{3}) + p(3, 3, -1)\}$$

$$\mathscr{L}_2' \parallel \mathscr{L}_2 \Longrightarrow \mathscr{L}_1' = \{(3, -1, -\frac{19}{3}) + k(6, 3, -7)\}$$

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2' = A: \quad (-8, -11, -1) + t(3, 3, -1) = (3, -1, -\frac{19}{3}) + k(6, 3, -7)$$

$$t = 3, \qquad k = -\frac{1}{3}$$

$$A = (1, -2, -4)$$

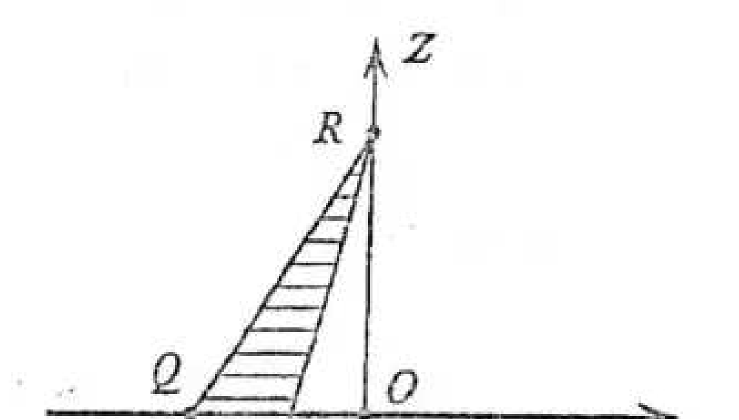
$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_1' = C \quad (11, 4, -14) + r(6, 3, -7) = (3, -1, -\frac{19}{3}) + p(3, 3, -1)$$

$$p = \frac{2}{3}, \qquad r = -1$$

$$C = (5, 1, -7)$$

2)

$$\mathscr{P}_{ABC} = \mathscr{P}: \quad 6x - 5y + 3z - 4 = 0$$



$$\mathscr{P} \cap (\text{eje } X) = T = (\frac{2}{3}, 0, 0)$$

$$\mathscr{P} \cap (\text{eje } Y) = Q = (0, -\frac{4}{5}, 0)$$



$$\mathscr{P} \cap (\text{eje } Z) = R = (0, 0, \frac{4}{3})$$

$$\begin{aligned} V_{O-TQR} &= \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OT}\ \overrightarrow{OQ}\ \overrightarrow{OR}]| \\ &= \frac{1}{6}|(-\frac{32}{45})| \\ &= \frac{16}{135} \end{aligned}$$



Sean los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad 2x + 3y + 4z = 9$$
$$\mathscr{P}_2: \quad x + y - 8z = -6$$
$$\mathscr{P}_3: \quad 5x + 6y - 20z = -9$$

1) Averiguar si los puntos $P = (3, 2, -1)$ y $Q = (1, 1, 2)$ se encuentran en ángulos opuestos, adyacentes o en el mismo ángulo formado por la intersección de los tres planos.

2) Averiguar si el ángulo que contiene al punto P es agudo u obtuso.

Solución.

1)

$$\mathscr{P}_1: \quad 2x + 3y + 4z = 9 \Longrightarrow \bar{n}_1 = (2,3,4)$$

$$\mathscr{P}_2: \quad x + y - 8z = -6 \Longrightarrow \bar{n}_2 = (-1,-1,8)$$

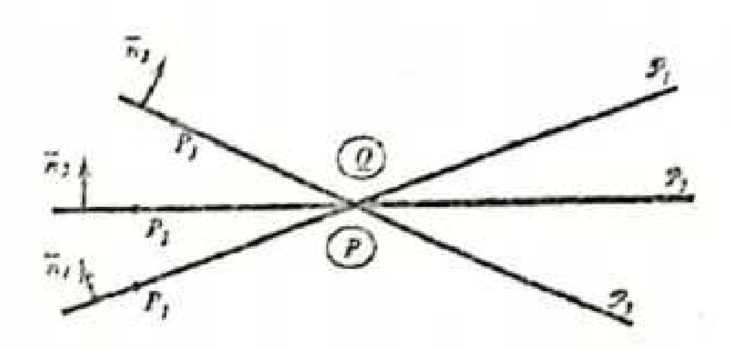
$$\mathscr{P}_3: \quad 5x + 6y - 20z = -9 \Longrightarrow \bar{n}_3 = (-5,-6,20)$$

$\mathscr{P}_1 \nparallel \mathscr{P}_2 \nparallel \mathscr{P}_3$, resolviendo el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas,

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \mathscr{L}$$

(es una recta)

$$\mathscr{L} = \{(-27,21,0) + t(28,-20,1)\} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$$



Para graficar las normales consideramos las componentes sobre el eje Z positivas y en orden creciente

$$P_1 = (0,3,0),\ P_2 = (0,-6,0),\ P_3 = (0,-\frac{3}{2},0)$$

puntos de paso arbitrarios de los planos $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3$ respectivamente.

Ubicamos en el espacio los puntos $P = (3,2,-1)$ y $Q = (1,1,2)$

$\mathscr{P}_1: \quad P - P_1 = (3,-1,-1),\ Q - P_1 = (1,-2,2)$

$(P - P_1) \cdot \bar{n}_1 = (3,-1,-1) \cdot (2,3,4) = 6 - 3 - 4 < 0$

$\Longrightarrow P$ debajo de $\mathscr{P}_1$

$(Q - P_1) \cdot \bar{n}_1 = (1,-2,2) \cdot (2,3,4) = 2 - 6 + 8 > 0$

$\Longrightarrow Q$ arriba de $\mathscr{P}_1$

$\mathscr{P}_2: \quad P - P_2 = (3,8,-1),\ Q - P_2 = (1,7,2)$

$$(P - P_2) \cdot \bar{n}_2 = (3, 8, -1) \cdot (-1, -1, 8) = -3 - 8 - 8 < 0$$

$$\Longrightarrow P \text{ debajo de } \mathscr{P}_2$$

$$(Q - P_2) \cdot \bar{n}_2 = (1, 7, 2) \cdot (-1, -1, 8) = -1 - 7 + 16 > 0$$

$$\Longrightarrow Q \text{ arriba de } \mathscr{P}_2$$

$$\mathscr{P}_3 : \quad P - P_3 = (3, \frac{7}{2}, -1), \; Q - P_3 = (1, \frac{5}{2}, 2)$$

$$(P - P_3) \cdot \bar{n}_3 = (3, \frac{7}{2}, -1) \cdot (-5, -6, 20) = -15 - 21 - 20 < 0$$

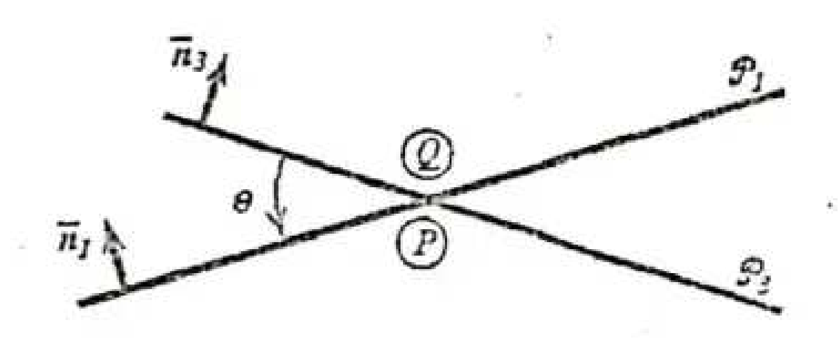
$$\Longrightarrow P \text{ debajo de } \mathscr{P}_3$$

$$(Q - P_3) \cdot \bar{n}_3 = (1, \frac{5}{2}, 2) \cdot (-5, -6, 20) = -5 - 15 + 40 > 0$$



$$\Longrightarrow Q \text{ arriba de } \mathscr{P}_3$$

Ubicando estos resultados en el gráfico, P y Q se encuentran en ángulos opuestos de la intersección de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_3$



2)

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_3}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_3|}$$

$$= \frac{(2, 3, 4) \cdot (-5, -6, 20)}{\sqrt{29}\sqrt{461}} > 0$$

θ es un ángulo agudo y P se encuentra en el ángulo obtuso formado por $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_3$

$y \mathscr{L}_3$

Ejercicio 4.70

Una fuente de luz se encuentra por encima del plano XY, un rayo incide sobre la superficie de un espejo situado en el plano determinado por las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(4,5,0) + t(3,4,0)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(2, \sqrt{3}+1, 0) + r(1, \sqrt{3}, 0)\}$$

si el rayo incidente sigue la dirección $(-1,1,4)$ y cae sobre la intersección de $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. ¿Cuál es la ecuación del rayo reflejado?

Solución.
Sea $\mathscr{P}$ el plano del espejo determinado por las rectas $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ y $P_0 = \mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2$

$$(4,5,0) + t(3,4,0) = (2, \sqrt{3}+1, 0) + r(1, \sqrt{3}, 0)$$

entonces

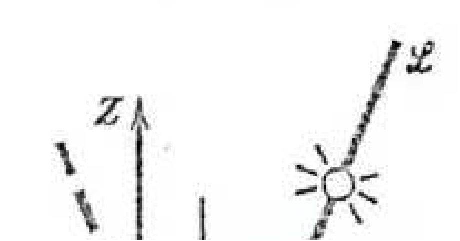
$$r = t = -1$$
$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P_0 = (1,1,0) \in \mathscr{P}_{XY}$$

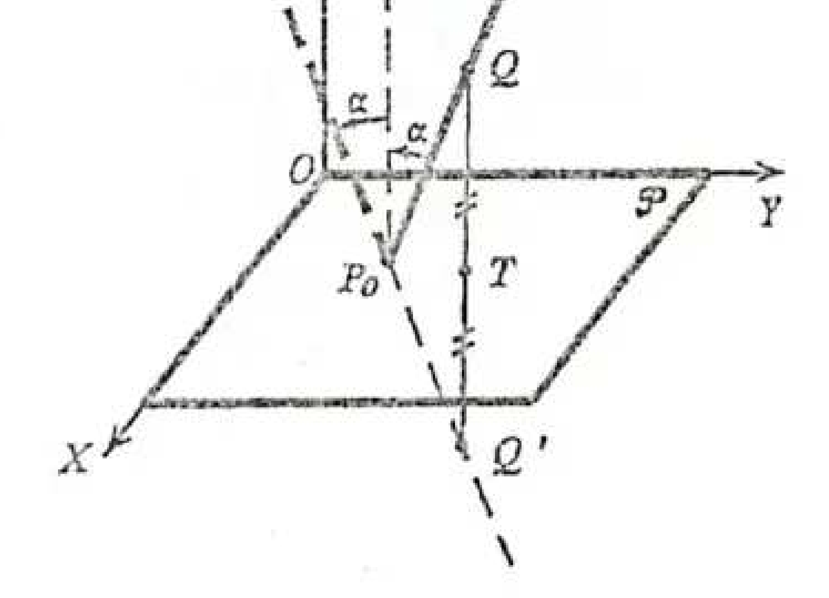
$$\mathscr{P}: \quad \vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$$

$$\vec{n} = (3,4,0) \times (1, \sqrt{3}, 0) = (0, 0, 3\sqrt{3} - 4),\ \vec{n} \parallel (0,0,1)$$

$$\mathscr{P}: \quad (0,0,1) \cdot (x-1, y-1, z) = 0$$
$$\mathscr{P}: \quad z = 0$$

(es el plano XY)





Rayo incidente

$$\mathscr{L} = \{(1,1,0) + k(-1,1,4)\}$$



Tomemos sobre $\mathscr{L}$ un punto Q arbitrario, luego calculamos Q' el simétrico de Q con respecto al plano XY. La recta que pasa por Q' y P_0 determina $\mathscr{L}'$ que es el rayo reflejado.

Para $k = 2$ entonces $Q = (-1,3,8) \in \mathscr{L}$

$\mathscr{L}_Q$ es la recta que pasa por Q ortogonal al plano $\mathscr{P}$

$$\mathscr{L}_Q = \{(-1,3,8) + t(0,0,1)\}$$

$\mathscr{L}_Q \cap \mathscr{P} = T$

$$\mathscr{P}: \quad z = 0$$

$$\mathscr{L} \cap \mathscr{P}: \quad 8 + t = 0 \Longrightarrow t = -8, \quad T = (-1,3,0)$$

$$T = \frac{Q + Q'}{2} \Longrightarrow Q' = 2T - Q = (-1,3,-8)$$

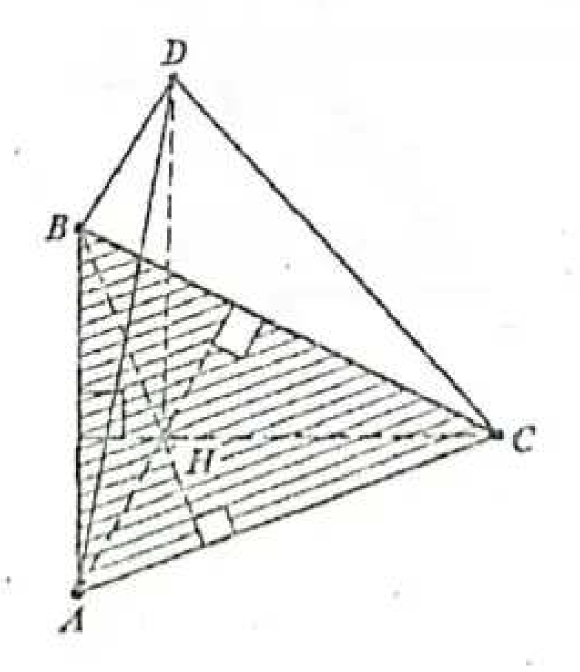
$\mathscr{L}'$ es el rayo reflejado

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}_{P_0Q'} = \{(1,1,0) + t(1,-1,4)\}$$



En un tetraedro $ABCD$, $A = (1,-2,2)$, $B = (-4,1,1)$, $C = (-5,-5,3)$. Sea $\mathscr{P}$ el plano que contiene al $\triangle ABC$. La proyección ortogonal de D sobre el plano $\mathscr{P}$ es H (ortocentro del $\triangle ABC$) si $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] = 660$. Calcular D

Solución.





$$\mathscr{P}_{ABC} = \mathscr{P}: \quad \bar{a} = \overrightarrow{AB} = (-5,3,-1)$$
$$\bar{b} = \overrightarrow{AC} = (-6,-3,1)$$

$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (0,11,33) \parallel (0,1,3)$$

$$\mathscr{P}: \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0, \quad P_0 = A$$
$$(0,1,3) \cdot (x-1, y+2, z-2) = 0$$
$$\mathscr{P}: y + 3z - 4 = 0$$

Calculamos el ortocentro H del $\triangle ABC$.

$\mathscr{P}_1$ = plano que pasa por A ortogonal a $\overrightarrow{BC} = (-1,-6,2)$

$$\bar{n}_1 = (1,6,-2), \quad A = (1,-2,2)$$

entonces

$$\mathscr{P}_1: \quad x + 6y - 2z + 15 = 0$$

$\mathscr{P}_2$ = plano que pasa por C ortogonal a $\overrightarrow{AB} = (-5,3,-1)$

$$\bar{n}_2 = (-5, -3, 1), \quad C = (-5, -5, 3)$$

entonces

$$\mathscr{P}_2 : \quad 5x - 3y + z + 7 = 0$$

$$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}_1 = \mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_{AH} = \{(-39, 4, 0) + t(20, -3, 1)\}$$
$$\mathscr{P} \cap \mathscr{P}_2 = \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_{CH} = \{(1, 4, 0) + r(-2, -3, 1)\}$$



$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = H = \left(-\frac{29}{11}, -\frac{16}{11}, \frac{20}{11}\right)$$

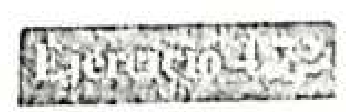
para $r = t = \frac{20}{11}$

$$\begin{aligned} V &= \text{volumen del tetraedro } ABCD \\ &= \frac{1}{6}[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] \\ &= \frac{1}{6}(660) \\ &= 110 \\ &= (\text{área base})(\text{altura}) \end{aligned}$$

$$\text{base} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}|(0, 11, 33)| = \frac{11}{2}\sqrt{10},$$
$$\text{altura} = \frac{110}{\frac{11}{2}\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}$$

$$D = H + \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}(0, 1, 3)$$

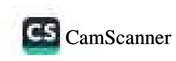
$$= \left(-\frac{29}{11}, -\frac{16}{11}, \frac{20}{11}\right) + 2(0,1,3) = \left(-\frac{29}{11}, \frac{6}{11}, \frac{86}{11}\right)$$



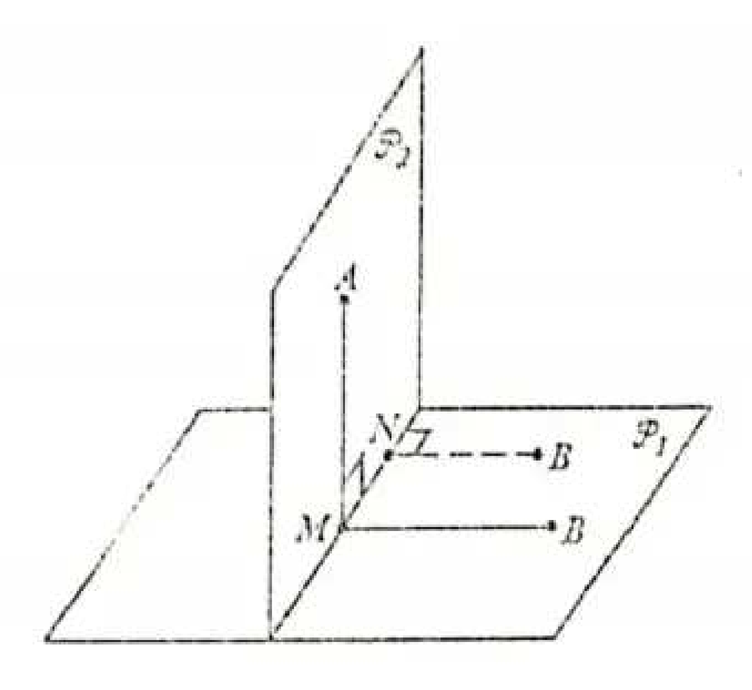
Sean los planos

$$\mathscr{P}_1 : \quad 2x + y + 2z - 3 = 0$$
$$\mathscr{P}_2 : \quad x + 2y - 2z = 0$$

Si $A = (16, -6, 2)$ y $B = (13, -3, -10)$, M es la proyección ortogonal de A sobre el plano $\mathscr{P}_1$ y N es la proyección ortogonal de B sobre el plano $\mathscr{P}_2$. Hallar la ecuación del plano que contiene a A, B, M, N



Solución.



$\mathscr{P}_1 \perp \mathscr{P}_2$ puesto que $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$.

Observamos que $A \in \mathscr{P}_2$ y $B \in \mathscr{P}_1$

$$M = \text{proy}_{\mathscr{P}_1} A, \qquad N = \text{proy}_{\mathscr{P}_2} B$$

$$\mathscr{L}_{AM} = \{A + t\bar{n}_1\} = \{(16, -6, 2) + t(2, 1, 2)\}$$

$$\mathscr{L}_{AM} \cap \mathscr{P}_1 = M$$

$$2(16 + 2t) + (-6 + t) + 2(2 + 2t) - 3 = 0$$

$$t = -3$$

$M = (10, -9, -4)$

$$\mathscr{L}_{BN} = \{B + r\vec{n}_2\} = \{(13, -3, -10) + r(1, 2, -2)\}$$

$$\mathscr{L}_{BN} \cap \mathscr{P}_2 = N$$
$$(13 + r) + 2(-3 + 2r) - 2(-10 - 2r) = 0$$
$$r = -3$$

$N = (10, -9, -4)$
Se deduce que $N = M$

$$\mathscr{P}_{AMB} = \mathscr{P} : \qquad \overrightarrow{MB} = (3, 6, -6), \quad \overrightarrow{MA} = (6, 3, 6)$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 6 & -6 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (54, -54, -27) \parallel (2, -2, -1)$$

$$\mathscr{P} : \quad \vec{n} \cdot (P - P_0) = 0, \qquad P_0 = M = (10, -9, -4)$$
$$(2, -2, -1) \cdot (x - 10, y + 9, z + 4) = 0$$
$$\mathscr{P} : \quad 2x - 2y - z - 42 = 0$$

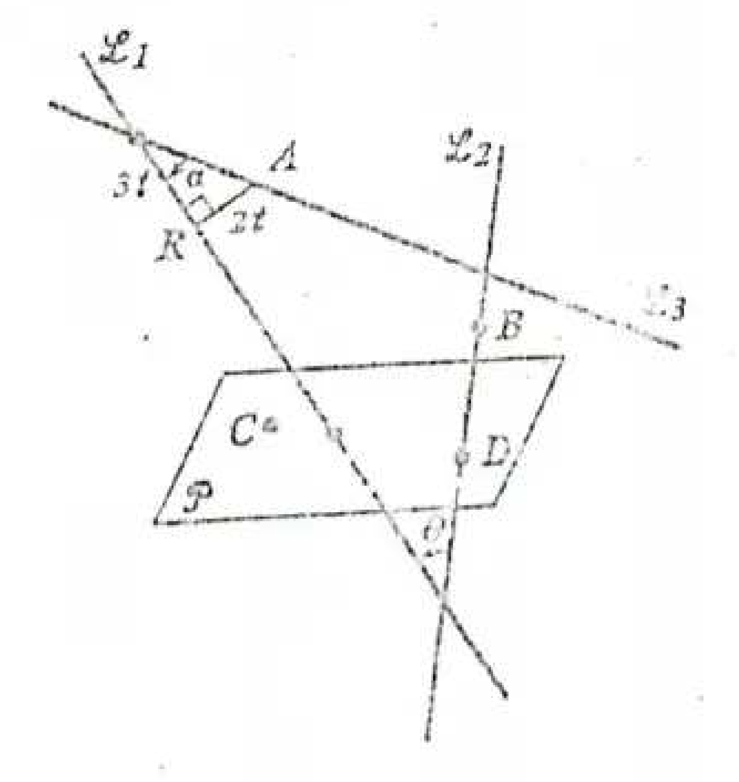


La recta

$$\mathscr{L}_1 = \{\left(13, \frac{26}{3}, \frac{65}{18}\right) + t(0, 1, 0)\}$$

es secante a un plano $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}_2$ es una recta secante a $\mathscr{P}$ en el punto $D = (18, 12, 0)$, el punto $B = (5, \frac{127}{3}, z)$, $z > 0$ pertenece a $\mathscr{L}_2$ y el punto $C = (0, 0, 13) \in \mathscr{P}$, $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ forman un ángulo cuya medida es θ tal que $\cos\theta = \frac{7}{\sqrt{67}}$, $\mathscr{L}_3$ es una recta paralela a $\mathscr{P}$, $\mathscr{L}_3$ interseca al plano formado por XZ en $E = (e_1, e_2, e_3)$, $e_1 > 0$, $A = (0, \frac{39}{2}, \frac{65}{18}) \in \mathscr{L}_3$, $\mathscr{L}_3$ forma con $\mathscr{L}_1$ un ángulo de medida α, donde $\tan\alpha = \frac{2}{3}$. Hallar la ecuación del plano $\mathscr{P}$

Solución.





$$\overrightarrow{DB} = B - D = (5, \frac{127}{3}, z) - (18, 12, 0) = (-13, \frac{91}{3}, z)$$

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{DB}\cdot(0,1,0)}{|\overrightarrow{DB}||(0,1,0)|} = \frac{\frac{91}{3}}{\sqrt{(-13)^2 + (\frac{91}{3})^2 + z^2}} = \frac{7}{\sqrt{67}}$$

$$169(58-49) = 9z^2$$
$$169 = z^2$$
$$z = \pm 13, \quad z = 13 > 0$$

entonces $B = (5, \frac{127}{3}, 13)$

$\triangle ATR:\quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

Si $T \in \mathcal{L}_1$ entonces

$$T = (13, \frac{26}{3}, \frac{65}{18}) + t(0,1,0) = (13, \frac{26}{3} + t, \frac{65}{18})$$

$$\overrightarrow{TA} = A - T = (0, \frac{39}{2}, \frac{65}{18}) - (13, \frac{26}{3} + t, \frac{65}{18}) = (-13, \frac{65}{6} - t, 0)$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{TA}\cdot(0,1,0)}{\ldots} = \frac{\frac{65}{6} - t}{\ldots} = \frac{3}{\ldots}$$

$$|\vec{TA}| \quad \sqrt{(-13)^2 + (\frac{65}{6} - t)^2} \quad \sqrt{13}$$

$$(\frac{65}{6} - t) = \pm\frac{3(13)}{2}$$
$$t = \frac{65}{6} \mp \frac{39}{2}$$
$$t = -\frac{26}{3}, \qquad t = \frac{91}{3}$$

$t = -\frac{26}{3}$ entonces

$$T = (13, \frac{26}{3} - \frac{26}{3}, \frac{65}{18}) = (13, 0, \frac{65}{18})$$

$$\overrightarrow{TA} = (-13, \frac{117}{6}, 0)$$

entonces

$$\overrightarrow{TA} \parallel (-2, 3, 0)$$
$$\mathscr{L}_3 = \{T + r\overrightarrow{TA}\} = \{(13, 0, \frac{65}{18}) + r(-2, 3, 0)\}$$

$\mathscr{L}_3 \cap \mathscr{P}_{XZ} = E$

$$\mathscr{P}_{XZ} : \quad y = 0$$
$$3r = 0 \Longrightarrow r = 0$$
$$E = (13, 0, \frac{65}{18}) = T$$

$$\mathscr{P} : \quad \bar{a} = \overrightarrow{CD} = (18, 12, 0) - (0, 0, 13) = (18, 12, -13)$$
$$\bar{b} \parallel \mathscr{L}_3 \parallel (-2, 3, 0)$$
$$\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b} = (39, 26, 78)$$
$$\bar{n} \parallel (3, 2, 6)$$
$$\mathscr{P} : \quad \bar{n} \cdot (P - P_0) = 0 \qquad P_0 = C = (0, 0, 13)$$
$$(3, 2, 6) \cdot (x, y, z - 13) = 0$$

$$\mathscr{P}: \quad 3x + 2y + 6z - 78 = 0$$

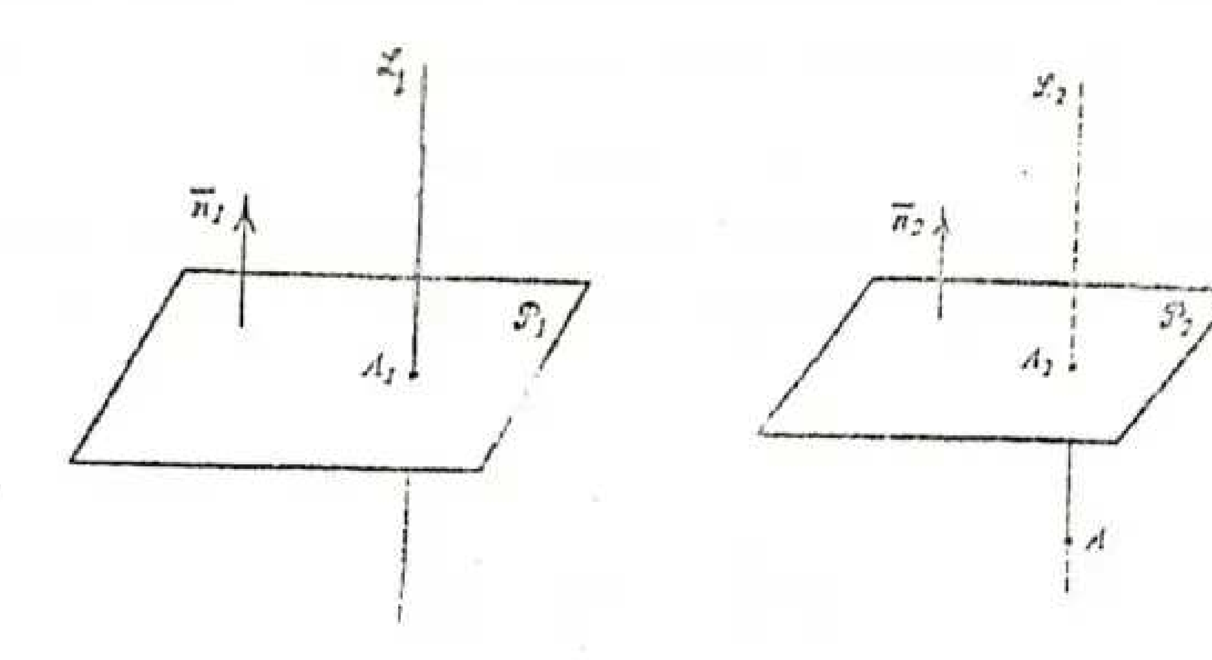


Sean los planos

$$\mathscr{P}_1: \quad x - 3y + 2z = 5$$
$$\mathscr{P}_2: \quad 3x - 2y - z = 1$$

$A = (8, -5, 5) \in \mathbb{R}^3$, A_1 es proyección ortogonal de A sobre $\mathscr{P}_1$, A_2 es la proyección ortogonal de A sobre $\mathscr{P}_2$. Sobre $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ encontrar un punto Q de modo que el área de la región triangular $A_1 Q A_2$ sea mínima

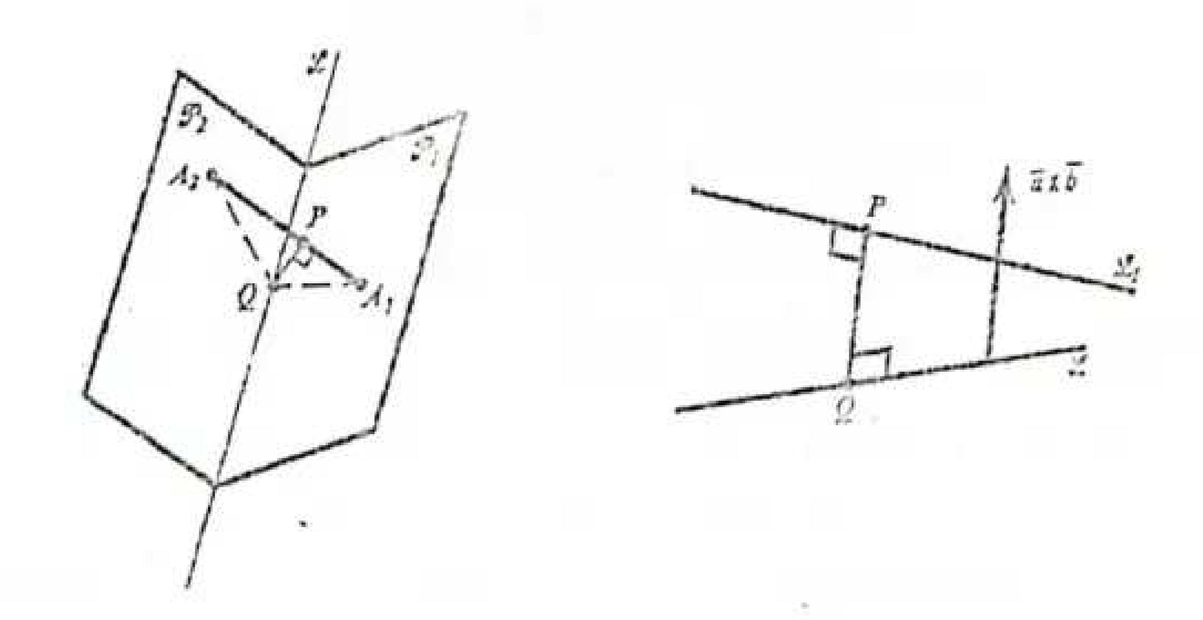
Solución.



$$\mathscr{L}_1 = \{A + t\bar{n}_1\}$$
$$\mathscr{L}_1 = \{(8, -5, 5) + t(1, -3, 2)\}$$
$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{P}_1 = A_1$$
$$(8 + t) - 3(-5 - 3t) + 2(5 + 2t) = 5$$
$$t = -2$$
$$A_1 = (6, 1, 1)$$

$$\mathscr{L}_2 = \{A + r\bar{n}_2\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(8, -5, 5) + r(3, -2, -1)\}$$
$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{P}_2 = A_2$$
$$3(8 + 3r) - 2(-5 - 2r) - (5 - r) = 1$$
$$r = -2$$
$$A_2 = (2, -1, 7)$$

$$\mathscr{L} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2, \qquad \mathscr{L} = \{(-1,-2,0) + k(1,1,1)\}, \qquad \mathscr{L} \parallel \bar{a} = (1,1,1)$$





$$\mathscr{L}_{A_1A_2} = \mathscr{L}_{12} = \{(6,1,1) + m(-4,-2,6)\}$$

$$\mathscr{L}_{12} = \{(6,1,1) + m(2,1,-3)\}, \quad \mathscr{L}_{12} \parallel \bar{b} = (2,1,-3)$$

$$Q \in \mathscr{L} \Longrightarrow Q = (-1+k, -2+k, k)$$

$$P \in \mathscr{L}_{12} \Longrightarrow P = (6+2m, 1+m, 1-3m)$$

QP = distancia mínima entre las rectas $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}_{12}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (1,1,1) \times (2,1,-3) \parallel (4,-5,1)$$

$$\overrightarrow{QP} \parallel \bar{a} \times \bar{b} \Longrightarrow (P - Q) \times (4,-5,1) = \bar{0}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 7+2m-k & 3+m-k & 1-3m-k \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = \bar{0}$$

entonces

$$m = -1, \qquad k = \frac{11}{3}$$

$$P = (4,0,4), \qquad Q = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

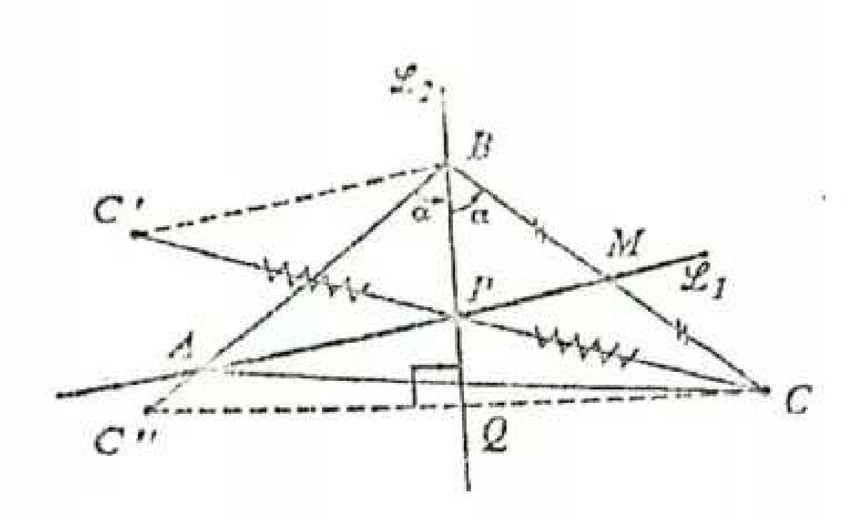
Si PQ es la altura mínima del $\triangle A_1QA_2$ entonces el área del $\triangle A_1QA_2$ es mínima.

Sea el triángulo ABC, donde $C = (-5, 14, -3)$.

$\mathscr{L}_1 = \{(-2, 8, -5) + t(-5, 9, -4)\}$ es mediana relativa al lado $\overline{BC}$ y

$\mathscr{L}_2 : \quad x = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-1}{-8}$ es bisectriz interior del ángulo B. Hallar los vértices del $\triangle ABC$.

Solución.



$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = P$$

$$(-2, 8, -5) + t(-5, 9, -4) = (0, 5, 1) + r(1, -3, -8)$$

$$t = -\frac{1}{2}, \qquad r = \frac{1}{2}$$

$$P = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -3)$$

C' es simétrico de C con respecto a P, entonces

$$P = \frac{C + C'}{2} \Longrightarrow C' = 2P - C$$

$$C' = (1,7,-6) - (-5,14,-3) = (6,-7,-3)$$

$\triangle C'BC$: $\overline{PM}$ es base media, entonces $\overrightarrow{C'B} \parallel \mathscr{L}_1$

$$\mathscr{L}_{C'B} = \{(6,-7,-3) + k(-5,9,-4)\}$$
$$\mathscr{L}_2 \cap \mathscr{L}_{C'B} = B$$
$$(0,5,1) + r(1,-3,-8) = (6,-7,-3) + k(-5,9,-4)$$
$$r = 1, \qquad k = 1$$



C'' simétrico de C con respecto a $\mathscr{L}_2$

$\mathscr{L}_2 \perp \mathscr{P}_C$

$$\mathscr{P}_C: \quad (1,-3,-8)\cdot(x+5, y-14, z+3) = 0$$
$$\mathscr{P}_C: \quad x - 3y - 8z + 23 = 0$$

$$\mathscr{P}_C \cap \mathscr{L}_2 = Q: \quad (r) - 3(5-3r) - 8(1-8r) + 23 = 0$$
$$\Longrightarrow r = 0$$
$$Q = (0,5,1), \qquad Q = \frac{C + C''}{2}$$
$$\Longrightarrow C'' = 2Q - C = (5,-4,5)$$

$$C'' \in \mathscr{L}_{AB}: \quad \mathscr{L}_{AB} = \{(5,-4,5) + p(2,-3,6)\}$$

$\mathscr{L}_{AB} \cap \mathscr{L}_1 = A$

$$(5,-4,5) + p(2,-3,6) = (-2,8,-5) + t(-5,9,-4)$$
$$p = t = -1$$

entonces

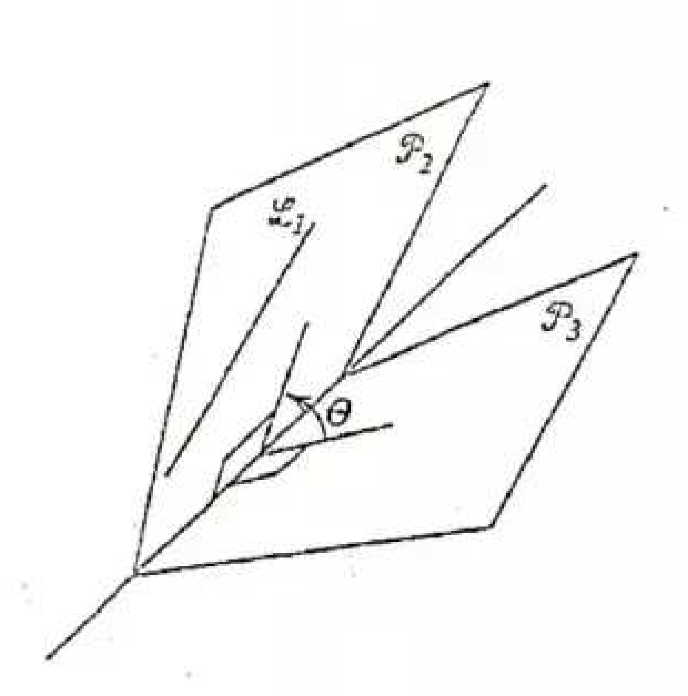
$$A = (3, -1, -1)$$

$\mathscr{P}_1: \quad 8x + 4y + 3z = 24$ y $\mathscr{P}_2$ son planos que se intersecan. El plano $\mathscr{P}_3$ contiene al eje X y al eje Y.

$\mathscr{L}_1 = \{(0, 6, 0) + t(22, 11, 25)\} \in \mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_2$ y $\mathscr{P}_3$ forman un ángulo cuya medida es θ tal que $\tan\theta = \frac{5\sqrt{5}}{11}$. Averiguar si los puntos $A = (6, 16, 3)$ y $B = (4, 10, 2)$ están en un mismo ángulo, en ángulos opuestos o en ángulos adyacentes formados por la intersección de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$



Solución.



$\mathscr{P}_3$ contiene a los ejes X, Y entonces

$$\mathscr{P}_3: \quad z = 0, \quad \bar{n}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\mathscr{P}_2: \quad \bar{n}_2 = (1, a, b)$$

$$x^2 = 121 + 125 = 246$$

$$x = \sqrt{246}$$

$$\cos\theta = \frac{11}{\sqrt{246}}$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_2 \cdot \bar{n}_3}{|\bar{n}_2||\bar{n}_3|} = \frac{(1,a,b)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1+a^2+b^2}} = \frac{11}{\sqrt{246}}$$

$$\sqrt{246}b = 11\sqrt{1+a^2+b^2}$$

$$246b^2 = 121(1+a^2+b^2) \tag{4.88}$$

$\mathscr{L}_1 \parallel (22,11,25) = \bar{c}$, $\quad \bar{c} \subset \mathscr{P}_2$ entonces

$$\bar{c}\cdot\bar{n}_2 = 0 \tag{4.89}$$

$$(22,11,25)\cdot(1,a,b) = 0$$

$$22 + 11a + 25b = 0 \tag{4.90}$$

De (4.88) y (4.89)

$$100b^2 + 220b + 121 = 0$$

$$b = -\frac{11}{10}, \quad a = \frac{1}{2}$$

entonces

$$\bar{n}_2 = (1, \frac{1}{2}, -\frac{11}{10}) \parallel (10, 5, -11)$$

$$\mathscr{P}_2 : \quad \bar{n}_2 \cdot (P - P_0) = 0, \text{ donde } P_0 = (0,6,0)$$

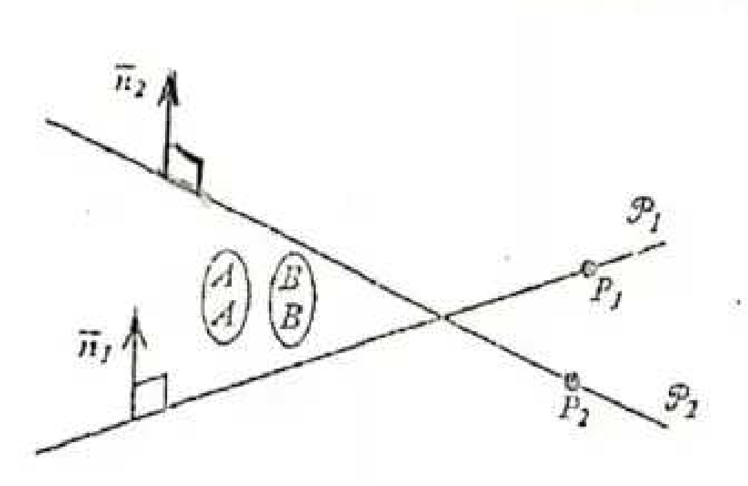
$$\mathscr{P}_2 : \quad (10,5,-11)\cdot(x, y-6, z) = 0$$

entonces

$$\mathscr{P}_2 : \quad 10x + 5y - 11z - 30 = 0$$

$$\bar{n}_1 = (8,4,3) \qquad \bar{n}_2 = (-10,-5,11)$$
$$P_1 = (3,0,0) \qquad P_2 = (3,0,0)$$
$$A = (6,16,3) \qquad B = (4,10,2)$$

$$\mathscr{P}_1 \begin{cases} A: & (A-P_1)\cdot\bar{n}_1 = (3,16,3)\cdot(8,4,3) > 0 \quad A \text{ encima de } \mathscr{P}_1 \\ B: & (B-P_1)\cdot\bar{n}_1 = (1,10,2)\cdot(8,4,3) > 0 \quad B \text{ encima de } \mathscr{P}_1 \end{cases}$$
$$\mathscr{P}_2 \begin{cases} A: & (A-P_2)\cdot\bar{n}_2 = (3,16,3)\cdot(-10,-5,11) < 0 \quad A \text{ debajo de } \mathscr{P}_2 \\ B: & (B-P_2)\cdot\bar{n}_2 = (1,10,2)\cdot(-10,-5,11) < 0 \quad B \text{ debajo de } \mathscr{P}_2 \end{cases}$$



Ubicando estos resultados en el gráfico, A y B están en un mismo ángulo de la intersección de los planos $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$



Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,3,-2) + t(1,-2,3)\}$$
$$\mathscr{L}_2: \quad x-2 = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-7}{4}$$

$A \in \mathscr{L}_1$ y $B \in \mathscr{L}_2$ tal que $d(A,B)$ es mínima. Hallar sobre el plano $\mathscr{P}$: $2x+3y-5z=10$ un punto Q tal que $d(Q,A)+d(Q,B)$ sea mínima.

Solución.

$$\mathscr{L}_1 = \{(1,3,-2) + t(1,-2,3)\} \qquad \mathscr{L}_1 \parallel \bar{a} = (1,-2,3)$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(2,1,7) + r(1,-3,4)\} \qquad \mathscr{L}_2 \parallel \bar{b} = (1,-3,4)$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = (1,-1,-1)$$

$$A \in \mathscr{L}_1 \Longrightarrow A = (1+t, 3-2t, -2+3t) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}$$

$$A \in \mathscr{L}_2 \Longrightarrow A = (2+r, 1-3r, 7+4r) \text{ para algún } r \in \mathbb{R}$$

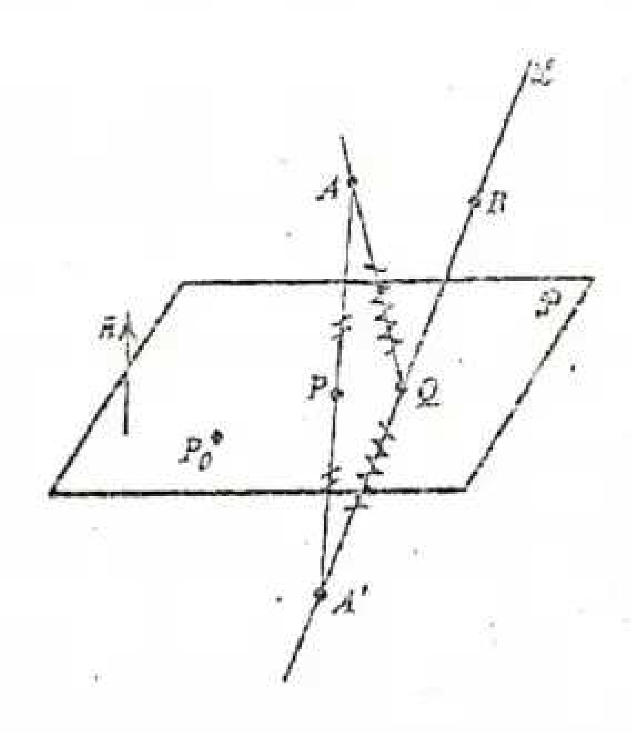
$$\overrightarrow{AB} \parallel (\bar{a} \times \bar{b}) \Longrightarrow (B-A) \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \bar{0}$$

$$(B-A) \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r-t+1 & -3r+2t-2 & 4r-3t+9 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (7r-5t+11, 5r-4t+10, 2r-t+1)$$
$$= \bar{0}$$

$t = 5$, $r = 2$ entonces

$$A = (6,-7,13), \qquad B = (4,-5,15)$$



$$\mathscr{P}: \quad 2x - 3y - 5z = 10$$

$$\bar{n} = (-2,3,5), \qquad P_0 = (5,0,0)$$

Ubicamos los puntos A y B con respecto al plano $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P}\begin{cases} A: & (A-P_0)\cdot\bar{n} = (1,-7,13)\cdot(-2,3,5) > 0 \quad A \text{ encima de } \mathscr{P} \\ B: & (B-P_0)\cdot\bar{n} = (-1,-5,15)\cdot(-2,3,5) > 0 \quad B \text{ encima de } \mathscr{P} \end{cases}$$

A' es el punto simétrico de A con respecto al plano $\mathscr{P}$.

$\mathscr{L}$ es la recta que pasa por B y A'

$\mathscr{L}\cap\mathscr{P} = Q$ tal que $d(Q,A)+d(Q,B)$ sea mínima.

En efecto

$$\mathscr{L}_A = \{A+t\bar{n}\} = \{(6,-7,13)+k(-2,3,5)\}$$

$$\mathscr{L}_A\cap\mathscr{P} = P: \quad 2(6-2k)-3(-7+3k)-5(13+5k) = 10$$

$$\Longrightarrow k = -\frac{21}{19}$$

$$P = \left(\frac{156}{19}, -\frac{196}{19}, \frac{142}{19}\right), \qquad P = \frac{A+A'}{2}$$

entonces

$$A' = 2P - A = \left(\frac{198}{19}, -\frac{259}{19}, \frac{37}{19}\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B} &= \left(4-\frac{198}{19}, -5+\frac{259}{19}, 15-\frac{37}{19}\right) \\ &= \left(-\frac{122}{19}, \frac{164}{19}, \frac{248}{19}\right)\end{aligned}$$

entonces

$$\overrightarrow{A'B} \parallel (-61,82,124)$$

$$\mathscr{L}_{A'B} = \{(4,-5,15)+q(-61,82,124)\}$$

$$\mathscr{L}_{A'B}\cap\mathscr{P}: \quad 2(4-61q)-3(-5+82q)-5(15+124q) = 10 \Longrightarrow q = -\frac{31}{494}$$

$$Q = (4-61q, -5+82q, 15+124q) = \frac{1}{\ }(3867, -5012, 3566)$$

494



Ejercicio 478

Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 : \quad \frac{x+3}{2} = \frac{z-5}{3}, \; y = 1$$

$$\mathscr{L}_2 = \{(9,5,-3) + t(5,7,11)\}$$

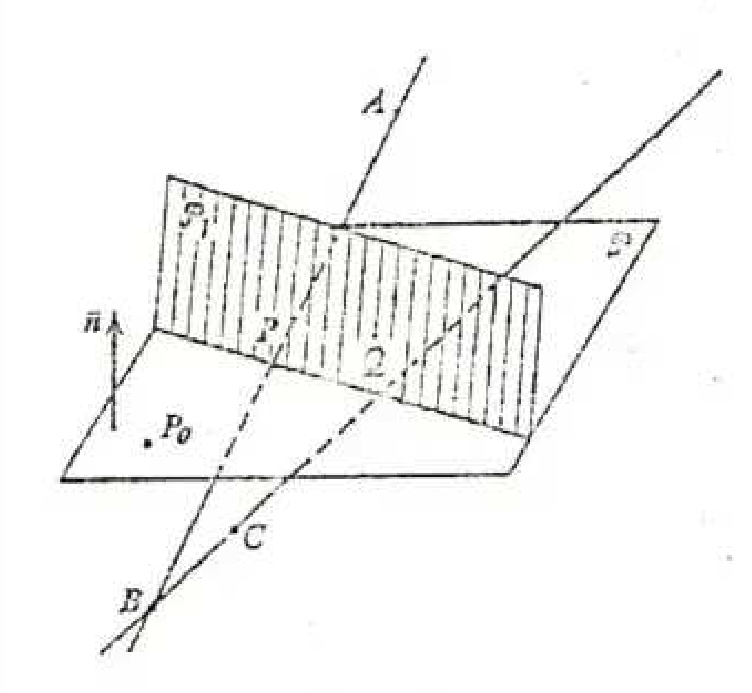
Un triángulo equilátero ABC de área mínima es tal que $A \in \mathscr{L}_1$ y $B \in \mathscr{L}_2$. Hallar la ecuación del plano que contiene al origen de coordenadas y al segmento $\overline{AB}$





Solución.

$$\mathscr{P} : \quad 5x - 2y - 4z = 10 \Longrightarrow \bar{n} \parallel (5,-2,-4)$$



$$\bar{n} = (-5,2,4), \qquad P_0 = (2,0,0)$$

$$A = (-15,7,9), \qquad B = (22,-10,-15), \qquad C = (16,-3,-6)$$

Ubicamos la posición de A, B y C con respecto al plano $\mathscr{P}$

$$A : \quad (A - P_0)\cdot\bar{n} = (-17,7,9)\cdot(-5,2,4) > 0 \Longrightarrow A \text{ encima de } \mathscr{P}$$

B : $(B - P_0) \cdot \bar{n} = (20, -10, -15) \cdot (-5, 2, 4) < 0 \Longrightarrow B$ debajo de $\mathscr{P}$

C : $(C - P_0) \cdot \bar{n} = (14, -3, -6) \cdot (-5, 2, 4) < 0 \Longrightarrow C$ debajo de $\mathscr{P}$

A y B están en lados opuestos del plano $\mathscr{P}$, entonces la recta

$$\mathscr{L}_{AB} = \{(-15, 7, 9) + t(37, -17, -24)\}$$

$$\mathscr{L}_{AB} \cap \mathscr{P} = P : \quad 5(-15 + 37t) - 2(7 - 17t) - 4(9 - 24t) = 0$$
$$\Longrightarrow t = \frac{3}{7}$$

$$P = \left(-15 + 37\left(\frac{3}{7}\right), 7 - 17\left(\frac{3}{7}\right), 9 - 24\left(\frac{3}{7}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{9}{7}\right) \in \mathscr{P}$$

tal que $d(P, A) + d(P, B)$ es mínima.

B y C están a un mismo lado del plano $\mathscr{P}$, entonces la recta

$$\mathscr{L}_{BC} = \{(22, -10, -15) + r(-6, 7, 9)\}$$

$$\mathscr{L}_{BC} \cap \mathscr{P} = Q : \quad 5(22 - 6r) - 2(-10 + 7r) - 4(-15 + 9r) = 10$$
$$\Longrightarrow r = \frac{9}{4}$$

$$Q = \left(22 - 6\left(\frac{9}{4}\right), -10 + 7\left(\frac{9}{4}\right), -15 + 9\left(\frac{9}{4}\right)\right)$$
$$= \left(\frac{34}{4}, \frac{23}{4}, \frac{21}{4}\right) \in \mathscr{P}$$

tal que $|d(Q, B) - d(Q, C)|$ es máxima

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{n}_1 \cdot (P - P_0) = 0, \qquad \bar{n}_1 \parallel \overrightarrow{PQ} \times \bar{n}, \qquad P_0 = Q = \left(\frac{34}{4}, \frac{23}{4}, \frac{21}{4}\right)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \end{vmatrix} \quad \left(\frac{310}{}, \frac{1771}{}, \frac{1273}{}\right)$$

$$\bar{n}_1 = \begin{vmatrix} \frac{214}{28} & \frac{169}{28} & \frac{183}{28} \\ 5 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \left(-\frac{310}{28}, \frac{1771}{28}, -\frac{1273}{28}\right)$$

$$\mathscr{P}_1 : \quad (310, -1771, 1273) \cdot \left(x - \frac{34}{4}, y - \frac{23}{4}, z - \frac{21}{4}\right) = 0$$

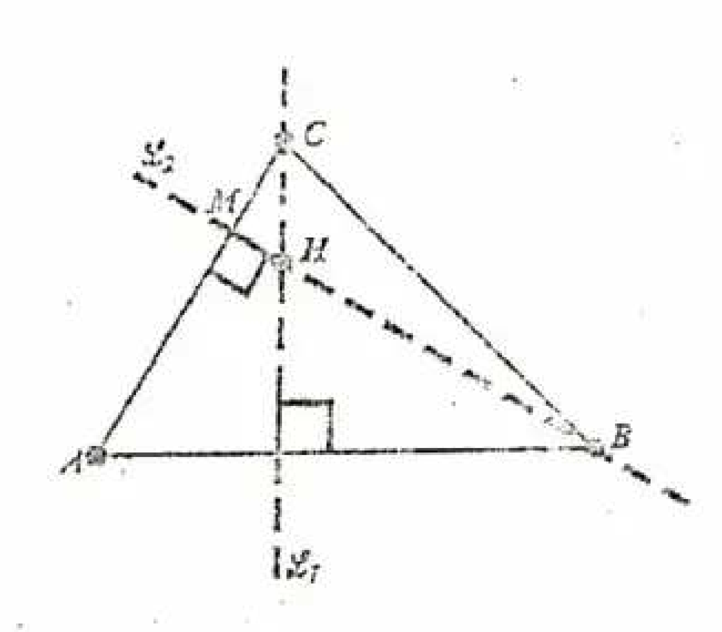
$$\mathscr{P}_1 : \quad 310x - 1771y + 1273z + 865 = 0$$

[illegible]

Sea el $\triangle ABC$ cuyo ortocentro es H donde $A = (3, -1, 6)$, $B = (-1, 7, -2)$ y el pie de la altura trazada desde el vértice B es $M = (1, -3, 2)$; el área del $\triangle ABC$ es $18\sqrt{5}\ \text{u}^2$. Hallar las coordenadas de C y H.



Solución.



$$\text{área } \triangle ABC = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$
$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{MB}|$$
$$= 18\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{MB} = (-2, 10, -4) = 2(-1, 5, -2)$$

$$|MB| = 2\sqrt{30}$$

$$\text{área } \triangle ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|2\sqrt{30} = 18\sqrt{5}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{AM} = (-2,-2,-4) = 2(-1,-1,-2)$$

entonces

$$|\overrightarrow{AM}| = 2\sqrt{6}$$



$$MC = AC - AM = 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{MC} = \sqrt{6}\frac{(-1,-1,-2)}{\sqrt{6}} = (-1,-1,-2)$$

entonces

$$C = M + (-1,-1,-2) = (0,-4,0)$$

$$\mathscr{P}_{ABC}: \quad \overrightarrow{AB} = (-4,8,-8), \quad \overrightarrow{AC} = (-3,-3,-6)$$
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (6,0,-3)$$

$$\mathscr{P}_{ABC}: \quad \vec{n}\cdot(P-A) = 0$$
$$(2,0,-1)\cdot(x-3,y+1,z-6) = 0$$
$$\mathscr{P}_{ABC}: \quad 2x - z = 0$$

$\mathscr{P}_1$: Pasa por C con normal $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 8, -8) \parallel \bar{n}_1 = (1, -2, 2), \qquad C = (0, -4, 0)$$

$$\mathscr{P}_1 : \quad \bar{n}_1 \cdot (P - C) = 0$$
$$(1, -2, 2) \cdot (x, y + 4, z) = 0$$

entonces

$$\mathscr{P}_1 : \quad x - 2y + 2z - 8 = 0$$



$$\mathscr{P}_{ABC} \cap \mathscr{P}_1 = \mathscr{L}$$

$$\mathscr{L}_1 = \{(0, -4, 0) + t(2, 5, 4)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{B + r\overrightarrow{MB}\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(-1, 7, -2) + r(1, -5, 2)\}$$

$$\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2 = H = \left(\frac{4}{5}, -2, \frac{8}{5}\right), \qquad t = \frac{2}{5}, \qquad r = \frac{9}{5}$$

4.2.2.10 Ejercicios propuestos

1) Hallar la ecuación del plano que dista del origen $\sqrt{234}$ u y que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$\mathscr{L}_1 = \{(9, 5, -4) + t(1, 1, 2)\}$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(1, 2, 3) + r(2, 1, 1)\}$$

Rpta: $\mathscr{P}$: $\quad 11x + 7y + 8z - 234 = 0$

2) Los puntos $A = (1,2,3)$, $B = (2,2,3)$, $C = (2,5,3)$, $D = (1,5,3)$ determinan la base de un paralelepípedo rectangular, dos de los vértices de la cara opuesta a la base pertenecen a la recta $\mathscr{L} = \{(2,3,5) + t(0,1,0)\}$ ¿Cuáles son dichos vértices?

3) Si se tiene un tetraedro con vértices $(0,0,0)$, $(4,8,12)$, $(12,4,8)$ y $(12,8,4)$. Si se une cada vértice con el baricentro de la base opuesta, se forman segmentos que se intersecan en un punto. Hallar las coordenadas de dicho punto

Rpta: $P = (7,5,6)$

4) Las rectas

$$\mathscr{L}_1: \quad \frac{x+1}{4} = y - 3; z = 1$$



$$\mathscr{L}_2: \quad \frac{x+13}{12} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{3}$$

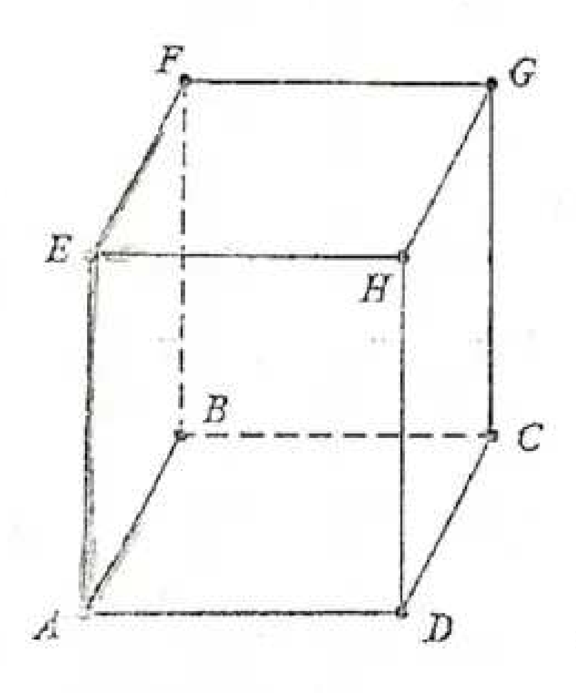
se intersecan en un punto P y estas rectas intersecan al plano XY en los puntos Q y R formándose el $\triangle PQR$.

(a) Hallar el punto P

(b) Hallar los puntos Q y R

(c) Encontrar el punto M del segmento $\overline{QR}$ tal que los triángulos PQM y PRM tengan áreas iguales

5) En el paralelepípedo de la figura, $F = (8,-3,1)$, $G = (11,1,-1)$, $C = (7,4,-2)$, $D = (0,6,-1)$



Hallar la distancia d mínima de entre las rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{EH}$

Rpta:

$A = (-3, 2, 1), B = (4, 0, 0), E = (1, -1, 2), H = (4, 3, 0), d = \frac{35}{26}\sqrt{1341}$

6) La recta $\mathscr{L} = \{(-9, -9, 8) + t(-5, -4, 2)\}$ se proyecta ortogonalmente sobre el plano $\mathscr{P}$: $5x + y + z - 8 = 0$ obteniéndose la recta $\mathscr{L}'$. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por $Q = (6, 3, 2)$ y que cortan a $\mathscr{L}'$ formando un ángulo de $60°$ con el plano $\mathscr{P}$

7) Un prisma recto tiene por bases hexágonos regulares cuyos lados miden 8 u. Considerando el sentido horario, llamamos $ABCDEF$ a la base inferior y $PQRSTU$ a la base superior de modo que $\overrightarrow{AP}$ es $\perp$ a las bases.

(a) Hallar $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{US}|$

Rpta: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{DT} + \overrightarrow{US}| = |\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}| = 24$

(b) Dados los vectores $\vec{a} = (3, 5, 2), \vec{b} = (-4, 0, 3)$ tales que $\vec{a} = \vec{c} + \vec{d}$ siendo $\vec{c} \parallel \vec{b}$ y $\vec{c} \perp \vec{d}$. Hallar $\text{proy}_{\vec{b}+25\vec{d}}\, 25(\vec{d} - \vec{a})$

Rpta: $\frac{2}{305}(47, 125, 71)$

8) Si

$$\text{proy}_{\vec{b}}\, \vec{a} = (2, 1, -1) \text{ y } \text{proy}_{\vec{a}}\, \vec{b} = (1, -1, 2)$$

Hallar $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ tal que

$$\vec{c} \cdot \text{proy}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \vec{c} \cdot \text{proy}_{\vec{a}}\, \vec{b} = 0$$

9) $ABCD$ es un cuadrilátero, sentido horario, cuya área es $5\sqrt{5}$ u^2. $\mathscr{L}_1 = \{(1, 3, 0) + t(0, 1, 0)\}$ es mediana del $\triangle BCD$ relativa al lado $\overline{CD}$ y $\mathscr{L}_2 = \{(-9, 4, -5) + r(2, 0, 1)\}$ es bisectriz interior del $\angle C$. Si $D = (-1, 6, -1)$, hallar los vértices del cuadrilátero.

Rpta: $A = (3, 5, 2), B = (1, 3, 0), C = (3, 4, 1), D = (-1, 6, -1)$

10) Sea $OABC$ un tetraedro. Los vértices $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (2, 1, 2), \vec{c} = (2, 1, 1)$ están asociados a las aristas $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ respectivamente

$\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}$ y $\overrightarrow{OC'}$ son las proyecciones de $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ sobre los planos OBC, OAC y OAB respectivamente. En qué relación se encuentran los volúmenes de los tetraedros $OABC$ y $OA'B'C'$

11) (a) Hallar la ecuación de la imagen de la recta

$$\mathscr{L}: \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = z-1$$

en el plano $\mathscr{P}$: $\quad x+y+z=4$

Rpta: $\mathscr{L}' = \{(0,2,2)+t(5,-4,-1)\}$

(b) Encontrar el ángulo entre la recta y su imagen

Rpta: $\theta = \text{arcsen}\, \frac{\sqrt{2}}{3}$



12) Sea la recta

$$\mathscr{L}: \frac{x-5}{-4} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-4}{3}$$

y el plano $\mathscr{P}: 3x+4z+19=0$, la base de un triángulo isósceles de área $30\sqrt{29}\,u^2$ se encuentra sobre la recta $\mathscr{L}'$ que es la proyección ortogonal de $\mathscr{L}$ sobre el plano $\mathscr{P}$.

Si el vértice A es el punto Q de $\mathscr{L}$, se pide:

(a) Encontrar las coordenadas de los vértices del triángulo.

(b) La distancia perpendicular desde el origen de coordenadas al plano que contiene al triángulo

13) (a) Si $(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{a}\times\bar{c}) = \bar{a}$. Calcular $\bar{m} = (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{b}\times\bar{c})$

Rpta: $\bar{m} = \bar{b}$

(b) Si $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} = \bar{0}$. D.q. $\bar{a}\times\bar{b}+\bar{b}\times\bar{c}+\bar{c}\times\bar{a} = 3\bar{a}\times\bar{b}$

(c) Para qué valores de t, los siguientes vectores son L.I.

$$\bar{a} = (t+3,1,2)\quad \bar{b} = (t,t-1,1),\ \bar{c} = (3t+3,t,t+3)$$

Rpta: $t \neq 0,1$

(d) D.q. $\bar{d}\times(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{c}) = [\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}](\bar{a}\cdot\bar{d})$

14) D.q. la distancia más corta desde un punto A a la recta que contiene al seg-

mento $\overline{BC}$ está dado por

$$\left|\frac{(\bar{a}\times\bar{b})+(\bar{b}\times\bar{c})+(\bar{c}\times\bar{a})}{|\bar{b}-\bar{c}|}\right|$$

donde $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ son radio vectores asociados a los puntos A, B y C respectivamente.

15) (a) Un tetraedro de volumen 5 u^3 tiene los vértices $A=(2,1,-1)$, $B=(3,0,1)$, $C=(2,-1,3)$ y D. Hallar las coordenadas del vértice D si se sabe que se encuentra sobre el eje Y (El problema admite dos soluciones D_1 y D_2)

Rpta: $D_1=(0,8,0)$, $D_2=(0,-7,0)$

(b) Hallar en el plano que contiene a los puntos A, B y C un punto Q de modo que $d(Q,D_1)+d(Q,D_2)$ sea mínima

Rpta: $Q=(0,-1,3)$

16) Sea el tetraedro $OABC$, $\overline{AM}$ es la mediana de la cara ABC y P divide al segmento $\overline{AM}$ en la razón $\frac{2}{5}$. Si G es baricentro del $\triangle OAB$ y $\overrightarrow{GP}=r\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+s\overrightarrow{OC}$. Hallar $(r+s+t)^{-2}$

17) Dadas las rectas

$$\mathscr{L}_1:\quad \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=z$$
$$\mathscr{L}_2:\quad 1-x=\frac{y-1}{3}=\frac{z-11}{2}$$

y $\mathscr{L}$ la recta que contiene a la distancia mínima entre $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$. Si $\mathscr{P}_1$ contiene a $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}$, $\mathscr{P}_2$ contiene a $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}$, $\mathscr{P}$ contiene a $\mathscr{L}$ y si además los ángulos diedros formados por los tres planos son iguales. Hallar la ecuación del plano $\mathscr{P}$

Rpta: $\mathscr{P}:\quad 4x-5y-z=51$

18)

$$\mathscr{L}_1=\left\{\left(-\frac{11}{3},\frac{10}{3},\frac{16}{3}\right)+t(1,0,-1)\right\}$$

$$\mathscr{L}_2 = \left\{\left(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) + r(5,3,-1)\right\}$$

son bisectrices del $\triangle ABC$. Si C se encuentra en el origen de coordenadas. Determinar A y B

19) Dada la recta $\mathscr{L} = \{(10,7,-9) + t(1,2,-1)\}$ y el punto $C = (13,1,0)$ fuera de $\mathscr{L}$.

(a) Hallar dos puntos A y B en $\mathscr{L}$ que forman con C un triángulo equilátero.

Rpta: $A = (5,-3,-4)$, $B = (9,5,-8)$

(b) Sea $Q = (2,2,2)$. Averiguar si Q está arriba o debajo del plano $\mathscr{P}$ que contiene a los puntos A, B y C.

Rpta: Q encima de $\mathscr{P}$



(c) Hallar las proyecciones de los vectores $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{BQ}$ y $\overrightarrow{CQ}$ sobre el plano $\mathscr{P}$

Rpta: $\text{proy}_{\mathscr{P}}\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}(5,1,4)$, $\text{proy}_{\mathscr{P}}\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}(-7,-23,16)$, $\text{proy}_{\mathscr{P}}\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{3}(-19,-11,-8)$

20) Demostrar que

(a) $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) + (\bar{b}\times\bar{c})\cdot(\bar{a}\times\bar{d}) + (\bar{c}\times\bar{a})\cdot(\bar{b}\times\bar{d}) = 0$

(b) $(\bar{a}\times(\bar{a}\times(\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b})))) = |\bar{a}|^4\bar{b}$ si los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son ortogonales.

(c) $\bar{c}\cdot(\bar{a}\times(\bar{a}\times(\bar{a}\times\bar{b}))) = -|\bar{a}|^2\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$

21) En un $\triangle ABC$, $C = (-5,14,-3)$, la recta $\mathscr{L}_1 : \quad x-1 = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$ es bisectriz interior del $\angle B$ y $\mathscr{L}_2 = \{(3,-1,-1) + t(-5,9,-4)\}$ es la mediana trazada desde A al lado $\overline{BC}$

(a) Hallar los vértices del $\triangle ABC$

Rpta: $A = (3,-1,-1)$, $B = (1,2,-7)$

(b) El área del $\triangle ABC$

Rpta: área $\triangle ABC = \sqrt{1862}$

22) Sea el $\triangle ABC$ con $A = (-1,-2,4)$, $B = (-4,-1,2)$ y $C = (-5,6,-4)$, D, E y F son puntos que pertenecen a $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente donde $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} \perp \overrightarrow{AB}$.

Hallar la ecuación de la recta que contiene a $\overline{FE}$

23) Decir cuáles de las siguientes proposiciones son V o F. Justificar

(a) Si $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ son vectores no nulos y $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ entonces $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son colineales.

Rpta: (V)

(b) $((\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{b} \times \bar{c})) \div ((\bar{b} \times \bar{c}) \times (\bar{c} \times \bar{a})) \times ((\bar{c} \times \bar{a}) \times (\bar{a} \times \bar{b})) = [\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}]$

(c) $\bar{a} \times (\bar{b} \times (\bar{c} \times \bar{d})) = [\bar{a}\ \bar{c}\ \bar{d}]\bar{b} - (\bar{a} \cdot \bar{b})(\bar{c} \times \bar{d})$

Rpta: (F)

(d) $|\bar{a} \times \bar{b}|^2 |\bar{a} \times \bar{c}|^2 = |(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} \times \bar{c})|^2 = |\bar{a}|^2 [\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]^2$

4) Sea el cuadrilátero $ABCD$ donde $A = (6, -8, 2), B = (0, 7, 7), C = (-14, 4, -2)$ y $D = (-8, -3, 17)$. Las proyecciones de los vértices del cuadrilátero sobre el plano $\mathscr{P}$; $y + 3z + 2 = 0$ son A', B', C' y D' respectivamente. Calcular el volumen y el área lateral del poliedro formado por $AB'CD'D$.

5) Sea el ΔABC, $C = (-5, 14, -3)$, la bisectriz del ángulo interno de B es $\mathscr{L}_1: \quad x - 1 = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$, $\mathscr{L}_2 = \{(-7, 17, -9) + t(-5, 9, -4)\}$ es mediana trazada desde A al lado $\overline{BC}$.

(a) Hallar los vértices del ΔABC

Rpta: $A = (3, -1, -1), B = (1, 2, -7), C = (-5, 14, -3)$

(b) Calcular el volumen del tetraedro con vértices $OABC$, donde O es el origen del sistema de coordenadas

Rpta: $V = \frac{107}{3}\ u^3$

6) Demostrar que

(a) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{a} \cdot \bar{a})(\bar{b} \cdot \bar{b}) - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2$

(b) $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a} \cdot \bar{c})(\bar{b} \cdot \bar{d}) - (\bar{a} \cdot \bar{d})(\bar{b} \cdot \bar{c})$

7) Dados $\bar{a} = (1,-1,0), \bar{b} = (2,1,1), \bar{c} = (-1,3,-2)$ en V_3. $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ son las proyecciones ortogonales de los vectores $\bar{a}, \bar{b}$ y $\bar{c}$ sobre los planos determinados por los vértices $(\bar{b}, \bar{c}), (\bar{a}, \bar{c})$ y $(\bar{a}, \bar{b})$ respectivamente. Si $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] = m$ y $[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] = n$. Calcular $2739n - m$

Rpta: -130

8) Sea el triángulo ABC, con $C = (-5,14,-3)$, $\mathscr{L}_1 = \{(-2,8,-5) + t(-5,9,-4)\}$ es mediana relativa al lado $\overline{BC}$ y $\mathscr{L}_2 : \quad x = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-1}{-8}$ es bisectriz interior del ángulo B. Hallar los vértices del $\triangle ABC$

9) (a) Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vectores en V_3 si $|\bar{b}| = \sqrt{5}, \bar{c} = (-1, c, 0), (\bar{b}-\bar{c})\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = 0, -2\bar{b}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2$. Calcular $|\bar{a}+\bar{b}|$

Rpta: $|\bar{a}+\bar{b}| = |\bar{b}| = \sqrt{5}$

(b) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ son vectores en V_3 que cumplen las siguientes condiciones

$$\bar{b} \times \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) \cdot \bar{c} = 18$$
$$(\bar{a}-\bar{c})\cdot(\bar{b}-\bar{c}) = -8$$
$$|\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{104}$$
$$\bar{b} \times \left(\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\right) + (\bar{a}-\bar{b}) = (7,9,4)$$

Calcular

$$t = |\bar{a}-\bar{c}|^2 + |\bar{b}-\bar{c}|^2 + \text{comp}_{\bar{b}\times\bar{a}}\, \bar{c}$$

Rpta: $t = 88 + \frac{3}{7}\sqrt{42}$

30) Sean las rectas

$$\mathscr{L}_1 : \quad \frac{x+3}{2} = \frac{z-5}{3},\ y = 1$$
$$\mathscr{L}_2 = \{(9,5,-3) + t(-5,-7,11)\}$$

Un triángulo equilátero ABC de área mínima es tal que $A \in \mathscr{L}_1$ y $B \in \mathscr{L}_2$. Hallar la ecuación del plano que contiene al origen de coordenadas y al segmento $\overline{AB}$

31) Sean $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} \subset V_3$

$$\begin{vmatrix} \bar{x}\cdot\bar{u} & \bar{x}\cdot\bar{v} & \bar{x}\cdot\bar{w} \\ \bar{y}\cdot\bar{u} & \bar{y}\cdot\bar{v} & \bar{y}\cdot\bar{w} \\ \bar{z}\cdot\bar{u} & \bar{z}\cdot\bar{v} & \bar{z}\cdot\bar{w} \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & t_1 \\ m_2 & n_2 & t_2 \\ m_3 & n_3 & t_3 \end{vmatrix}$$

donde

$$\begin{cases} \bar{x} = m_1\bar{u} + n_1\bar{v} + t_1\bar{w} \\ \bar{y} = m_2\bar{u} + n_2\bar{v} + t_2\bar{w} \\ \bar{z} = m_3\bar{u} + n_3\bar{v} + t_3\bar{w} \end{cases}$$

Calcular $[\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}]$

Rpta: $[\bar{u}\ \bar{v}\ \bar{w}] = 3$

32) Si $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{m}\} \subset V_3$ donde $[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}] \neq 0$. D.q.

$$[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{m} = [\bar{m}\ \bar{b}\ \bar{c}]\bar{a} + [\bar{m}\ \bar{c}\ \bar{a}]\bar{b} + [\bar{m}\ \bar{a}\ \bar{b}]\bar{c}$$



33) Determinar el valor de k para que las siguientes expresiones sean una identidad

(a) $(\bar{a} \times (\bar{a} \times (\bar{a} \times \bar{b}))) \cdot \bar{c} = k[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

Rpta: $k = -|\bar{a}|^2$

(b) $(\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}) \times (\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) = k[\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}]$

Rpta: $k = 3$